



$$\left(\sqrt[n]{m \sqrt[p]{q}} \right)^{np} = \sqrt[n]{m^{np} q^p}$$

CONSTANTIN PARVU
IOAN ȘT. FUSAT
SANDA FLORESCU
ZLATE BOGDANOF
EREMIA GEORGESCU-BUZĂU

ALGEBRA

MANUAL PENTRU CLASA A IX-a LICEU
ȘI ANUL I LICEE DE SPECIALITATE

CONSTANTIN PÂRVU — profesor

IOAN Șt. MUȘAT — profesor

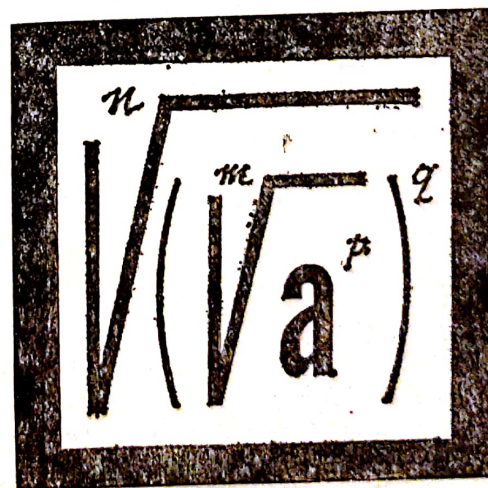
SANDA FLORESCU — profesor

ZLATE BOGDANOF — profesor
emerit

EREMIA GEORGESCU-BUZĂU
profesor

ALGEBRA

MANUAL PENTRU CLASA A IX-a LICEU
ȘI ANUL I LICEE DE SPECIALITATE



EDITURA DIDACTICĂ
ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1968

ANDREI
OVIDIU

CAPITOLUL I

MULȚIMI. RELAȚII. PROPOZIȚII. MULȚIMI DE NUMERE

1. MULȚIMI. RELAȚII. PROPOZIȚII

a) Mai multe obiecte concepute la un loc se spune că formează o *mulțime*.

Obiectele mulțimii se numesc *elemente* ale mulțimii respective.

Exemple:

1. *Mulțimea orașelor din Europa.* Orașul București este un *element* al acestei mulțimi.

2. *Mulțimea numerelor naturale mai mari decât numărul trei.*

Numărul cinci este un *element* al acestei mulțimi.

b) *Notatii.* Mulțimile se notează cu literele majuscule din alfabetul latin $A, B, C, D, \dots$ precum și cu alte semne sau combinații de semne. În loc de a spune „mulțimea notată cu semnul A ”, vom spune pe scurt „mulțimea A ”.

Faptul că aceeași mulțime este notată cu două semne diferite, se pune în evidență scriindu-se semnul „ $=$ ” între cele două semne. De exemplu, dacă literele A și B desemnează aceeași mulțime se scrie $A = B$ și se citește: „mulțimea A este egală cu mulțimea B ”. Altfel spus, afirmația $A = B$ referitoare la mulțimi este adevărată atunci și numai atunci când literele A și B reprezintă aceeași mulțime.

Elementele unei mulțimi se notează cu diferite semne sau succesiuni de semne. În loc de a spune „elementul notat cu semnul a ”, vom spune, pe scurt, „elementul a ”. Dacă un element al unei mulțimi este notat cu două semne se subliniază aceasta scriindu-se semnul „ $=$ ” între ele. De exemplu, dacă același element al unei mulțimi este notat cu semnul a și cu semnul b se scrie $a = b$ și se citește „elementul a este egal cu elementul b ”. Altfel spus, afirmația $a = b$ referitoare la elementele unei mulțimi este adevărată atunci și numai atunci când literele a și b reprezintă același element.

Cele mai frecvente semne în algebră elementară sînt cifrele* și combinațiile de semne conținînd cifre, prin care se desemnează numere. Semnul „ $=$ ”

* Prin cifre înțelegem semnele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

scris între două cifre sau combinații de cifre arată că semnele situate de-o parte și de alta a semnului „ $=$ ” desemnează același număr. De exemplu, prin scrierea $5 \cdot 7 = 6 \cdot 5 + 5$ se înțelege faptul că semnele „ $5 \cdot 7$ ” și „ $6 \cdot 5 + 5$ ” reprezintă același număr (numărul denumit treizeci și cinci).

Așadar, semnul „ $=$ ” se folosește pentru a sublinia că semnele situate de o parte și de cealaltă a lui desemnează aceeași mulțime sau același element al unei mulțimi.

Relația de egalitate între elementele unei mulțimi M are următoarele proprietăți:

E_1 . Afirmatia $a = a$ este adevărată oricare ar fi elementul a din M . Această proprietate se numește proprietatea de reflexivitate a relației de egalitate (relația de egalitate este o relație reflexivă).

E_2 . Dacă afirmația $a = b$ este adevărată, atunci și afirmația $b = a$ este adevărată.

Această proprietate se numește proprietate de simetrie a relației de egalitate (relația de egalitate este o relație simetrică).

E_3 . Dacă afirmațiile $a = b$ și $b = c$ sînt adevărate, atunci este adevărată și afirmația $a = c$. Această proprietate se numește proprietatea de tranzitivitate a relației de egalitate (relația de egalitate este o relație tranzitivă).

Consecință. Dacă afirmațiile $b = a$ și $b = c$ sînt adevărate, atunci și afirmația $a = c$ este adevărată.

Într-adevăr, dacă afirmația $b = a$ este adevărată, atunci este adevărată și afirmația $a = b$ (proprietatea E_2) și din $a = b$ și $b = c$ rezultă, folosind proprietatea E_3 , că $a = c$.

Proprietatea subliniată sub denumirea de consecință se exprimă, prin abuz de limbaj, astfel:

Două cantități egale cu a treia sînt egale între ele.

Uneori, dacă pentru elementele unei mulțimi există semne consacrate, pentru a desemna această mulțime se scriu semnele prin care se desemnează elementele într-o acoladă, în orice ordine dorim.

De exemplu, mulțimea primelor trei numere naturale va fi notată prin oricare dintre semnele:

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$.

Deoarece toate aceste notații reprezintă aceeași mulțime vom scrie:

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 1, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 2, 1\}.$$

Ordinea în care sînt scrise elementele unei mulțimi nu are importanță.

În unele cazuri, cînd cunoaștem mulțimea la care ne referim și există semne consacrate pentru toate elementele mulțimii, scriem numai cîteva semne într-o acoladă, completînd cu puncte.

De exemplu, mulțimea numerelor naturale mai mari decît trei va fi notată astfel:

$\{4, 5, 6, \dots\}$.

c) *Relația de apartenență.* În loc de a spune că „elementul a este un element al mulțimii A ” vom mai spune că *elementul a aparține mulțimii A* și vom scrie:

$$a \in A.$$

Dacă a nu aparține mulțimii A vom scrie:

$$a \notin A.$$

Exemplu: Fie A mulțimea primelor cinci numere naturale, adică $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Avem:

$$3 \in A \quad (3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}).$$

$$8 \notin A \quad (8 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}).$$

d) *Propoziții.* În legătură cu mulțimile sau elementele mulțimilor putem formula diferite propoziții. Aceste propoziții pot fi redactate în cuvinte sau folosind în locul cuvintelor unele semne consacrate, când acestea există. De exemplu, în loc de cuvântul „trei” vom scrie semnul „3”, în loc de „doi ori trei plus patru” vom scrie „ $2 \cdot 3 + 4$ ”, în loc de „este egal” vom scrie semnul „=”, în loc de „aparține” vom scrie semnul „ $\in$ ” etc. De exemplu, propoziția „trei ori patru plus cinci este egal cu șapte-sprezece” va fi scrisă astfel: „ $3 \cdot 4 + 5 = 17$ ”.

O propoziție poate fi în unul și numai unul din cazurile: *adevărată* sau *falsă*.

Exemple:

- 1) „ $3 \cdot 4 + 8 = 20$ ”. Această propoziție este *adevărată*.
- 2) „ $2 \cdot 3 = 5$ ”. Această propoziție este *falsă*.

e) *Propoziții deschise.* Dacă într-o propoziție în afară de semnele consacrate pentru diverșii termeni care intervin, cum ar fi semnele 1, 2, 3, ... $+$, $\cdot$, $-$, $\sqrt{}$ etc. mai figurează și alte semne (de obicei litere) prin care se desemnează elemente neprecizate ale unei mulțimi, se spune că propoziția respectivă este o *propoziție deschisă*, iar semnele folosite pentru notarea elementelor neprecizate se numesc *necunoscute*. Dacă, de pildă, o propoziție conține necunoscuta x , înlocuind pe x cu semnul prin care se desemnează un element determinat al mulțimii, putem obține o propoziție *adevărată* sau o propoziție *falsă*. Dacă, de exemplu, înlocuim pe x cu semnul 2, se spune că i-am dat lui x valoarea 2.

Exemple:

1. Fie M mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ și x o literă prin care notăm un element neprecizat al acestei mulțimi. Propoziția „ $2^x = 2$ ” este o propoziție deschisă. Punând în loc de x semnul 1 obținem „ $2^1 = 2$ ”, propoziție care este *adevărată*. Pentru $x = 2$, obținem „ $2^2 = 2$ ”, propoziție care este *falsă*.
2. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și propoziția $x + y = 4 (x \in A, y \in A)$. Dacă $x = 1$ și $y = 3$, obținem $1 + 3 = 4$. Această propoziție este *adevărată*. La fel dacă $x = 3$ și $y = 1$. Dacă $x = 2$ și $y = 3$, obținem $2 + 3 = 4$. Această propoziție este *falsă*.

f) *Afirmații formate cu ajutorul conjuncției „și”*. Fiind date mai multe propoziții $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, folosind conjuncția „și” putem forma afirmația „ P_1 și P_2 și P_3 și ... P_n ”.

Admitem că afirmația „ P_1 și P_2 și P_3 și ... P_n ” este adevărată atunci și numai atunci când fiecare din propozițiile $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ este adevărată.

Exemplu:

Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ și propozițiile $x + 3y = 10$, $2x + y = 5 (x \in A, y \in A)$.

Cu aceste propoziții se poate forma afirmația „ $x + 3y = 10$ și $2x + y = 5$ ”. Această afirmație este adevărată când propoziția $x + 3y = 10$ este adevărată și în același timp propoziția $2x + y = 5$ este adevărată.

Propoziția $x + 3y = 10$ este adevărată dacă:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Propoziția $2x + y = 5$ este adevărată dacă:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ambele propoziții sînt adevărate dacă: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

Așadar, afirmația „ $x + 3y = 10$ și $2x + y = 5$ ” este adevărată dacă: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

g) *Afirmații formate cu ajutorul conjuncției „sau”*. Fiind date mai multe propoziții $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, folosind conjuncția „sau” putem forma afirmația „ P_1 sau P_2 sau P_3 sau ... P_n ”.

Admitem că afirmația „ P_1 sau P_2 sau P_3 sau ... P_n ” este adevărată atunci și numai atunci când cel puțin una dintre propozițiile $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ este adevărată.

Faptul că una din propoziții este adevărată nu exclude posibilitatea ca să fie adevărate în același timp mai multe propoziții, eventual toate propozițiile.

Exemplu:

Fie mulțimea $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ și propozițiile $x - 1 = 0$, $x^2 = 1 (x \in A)$. Propoziția „ $x - 1 = 0$ sau $x^2 = 1$ ” este adevărată când cel puțin una dintre propozițiile $x - 1 = 0$, $x^2 = 1$ este adevărată.

Propoziția $x - 1 = 0$ este adevărată când $x = 1$, iar propoziția $x^2 = 1$ este adevărată când $x = 1$ sau $x = -1$. Așadar, propoziția „ $x - 1 = 0$ sau $x^2 = 1$ ” este adevărată dacă $x = 1$ sau $x = -1$.

h) *Submulțimi ale unei mulțimi. Incluziune*. Fie o mulțime M . Vom spune că o mulțime A este submulțime sau o parte a mulțimii M dacă orice element al mulțimii A este în același timp și element al mulțimii M .

Dacă A este o submulțime parte a lui M se scrie $A \subset M$ și se citește mulțimea A este inclusă în mulțimea M .

Exemple:

1. Fie $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $A = \{2, 4, 6\}$.

A este o submulțime a lui M deoarece toate elementele mulțimii A sînt în același timp și elemente ale mulțimii M . Așadar, $A \subset M$.

2. Fie M mulțimea punctelor situate în interiorul curbei închise din dreptul literei M (fig. 1) și A mulțimea punctelor situate în interiorul curbei închise din dreptul literei A . A este o submulțime a lui M deoarece orice element (punct) al mulțimii A este un element (punct) din mulțimea M .

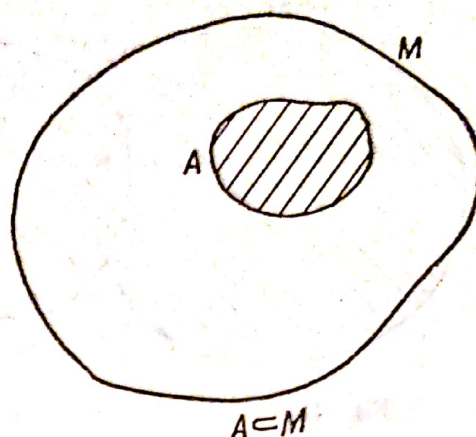


Fig. 1.

Observație. Oricare ar fi mulțimea M , avem $M \subset M$. Într-adevăr, orice element al mulțimii M este un element al mulțimii M .

i) *Submulțimi definite prin proprietăți.* Orice propoziție P_x referitoare la un element neprecizat x al unei mulțimi M definește o submulțime A a mulțimii M , și anume mulțimea formată din toate elementele x ale mulțimii M , pentru care propoziția este adevărată.

Submulțimea A a lui M se va nota prin semnul $\{x \in M \mid P_x\}$ și se va citi mulțimea elementelor din M care au proprietatea P_x .

Exemple:

1. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și mulțimea $N = \{x \in M \mid x \geq 3\}$ (mulțimea elementelor $x \in M$ cu proprietatea $x \geq 3$). Avem: $\{x \in M \mid x \geq 3\} = \{3, 4, 5, 6\}$.
2. Fie mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{x \in A \mid x^2 = 1\}$ (mulțimea B este mulțimea elementelor $x \in A$ care au proprietatea $x^2 = 1$).
Așadar $\{x \in A \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$.

j) *Mulțimea vidă.* Fie mulțimea $\{x \in M \mid P_x\}$. Dacă propoziția P_x este falsă, oricare ar fi x din M , se spune că această propoziție (proprietate) definește o mulțime numită *mulțimea vidă* și notată cu semnul ϕ . *Mulțimea vidă nu conține nici un element.*

Exemple:

1. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
Avem: $\{x \in A \mid 4x = 3\} = \phi$ (oricare ar fi x din A , propoziția $4x = 3$ este falsă).
2. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Avem:

$$\{x \in M \mid 2x = 4 \text{ și } x - 5 = 1\} = \phi.$$

Într-adevăr, pentru ca propoziția „ $2x = 4$ și $x - 5 = 1$ ” să fie adevărată este necesar ca propozițiile $2x = 4$ și $x - 5 = 1$ să fie adevărate în același timp, lucru care nu este posibil, deoarece prima propoziție este adevărată dacă $x = 2$, iar a doua este adevărată dacă $x = 6$. Așadar, afirmația „ $2x = 4$ și $x - 5 = 1$ ” este falsă oricare ar fi $x \in M$.

Observație. Mulțimea vidă ϕ se admite ca submulțime (parte) a oricărei mulțimi M (se scrie $\phi \subset M$).

k) *Reuniunea mulțimilor.* Fie $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ mai multe mulțimi. Mulțimea elementelor x care au proprietatea „ $x \in M_1$ sau $x \in M_2$ sau... sau $x \in M_n$ ” se numește *reuniunea mulțimilor* $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ și se notează astfel:

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots \cup M_n.$$

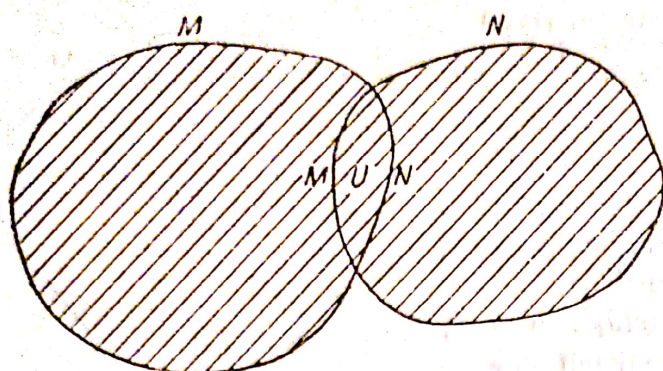


Fig. 2.

Avem: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. Fie $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$ și $C = \{1, 3\}$.

Avem: $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\}$.

4. Fie M mulțimea punctelor situate în interiorul curbei închise din dreptul literei M și N mulțimea punctelor situate în interiorul curbei din dreptul literei N (fig. 2). Mulțimea $M \cup N$ este reprezentată prin mulțimea hașurată din figura 2.

1) *Intersecția mulțimilor.* Fie mulțimile $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$. Mulțimea formată cu elementele comune ale mulțimilor date se numește *intersecția* acestor mulțimi și se notează cu $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \dots \cap M_n$. Mulțimea $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$ este mulțimea elementelor x care au proprietatea „ $x \in M_1$ și $x \in M_2$ și ... și $x \in M_n$ ”.

Observație. Dacă M și N sunt două submulțimi ale unei mulțimi A , avem $M \cap N = \{x \in A \mid x \in M \text{ și } x \in N\}$.

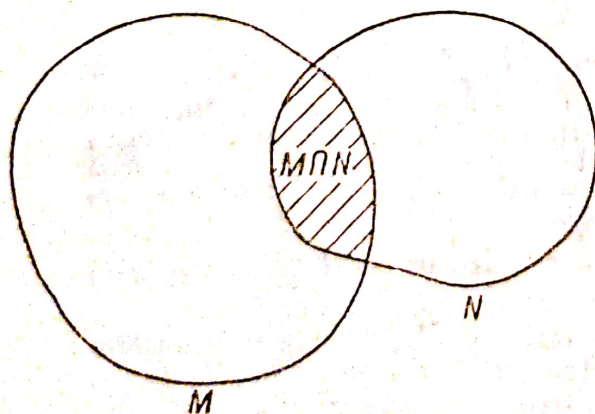


Fig. 3.

Dacă M și N sunt două submulțimi ale unei mulțimi A , avem:

$$M \cup N = \{x \in A \mid x \in M \text{ sau } x \in N\}.$$

Exemple:

1. Fie $M_1 = \{1, 2, 3\}$ și $M_2 = \{4, 5, 6\}$.

Avem:

$$M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{3, 4, 5, 6\}$

Exemple:

1. Fie $M = \{1, 2, 3, 4\}$ și $N = \{3, 4, 5, 6\}$.

Avem:

$$M \cap N = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4\}.$$

2. Fie $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ și $C = \{3, 5, 6\}$.

Avem: $A \cap B \cap C = \{3\}$.

3. Fie M mulțimea punctelor situate în interiorul curbei închise din dreptul literei M și N mulțimea punctelor situate în interiorul curbei închise din dreptul literei N (fig. 3). Mulțimea $M \cap N$ este reprezentată prin mulțimea hașurată din figura 3.

Dacă M și N n-au elemente comune, se scrie $M \cap N = \emptyset$ mulțimea vidă. În acest caz mulțimile M și N se numesc *disjuncte*. De exemplu, $\{1, 2, 3\} \cap \{5, 6\} = \emptyset$.

m) *Diferențe a două mulțimi*. Fie M și N două mulțimi. Mulțimea elementelor care fac parte din M și care nu fac parte din N se numește *diferența* dintre mulțimea M și mulțimea N și se notează cu semnul $M - N$.

Exemplu:

Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Avem:

$$A - B = \{1, 2\},$$

$$B - A = \{5, 6\}.$$

Observații a) $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

b) Dacă mulțimile A și B nu au elemente comune, atunci $A - B = A$ și $B - A = B$.

Exemplu:

$$\{1, 2, 3, 4\} - \{5, 6\} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ și } \{5, 6\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6\}.$$

2. MULȚIMI DE NUMERE

În acest paragraf vom sublinia câteva proprietăți ale numerelor, proprietăți pe care le admitem cunoscute.

1. NUMERE NATURALE

Numerele $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ se numesc *numere naturale*. Mulțimea numerelor naturale se notează cu N .

Deci,

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Se știe că *suma și produsul a două numere naturale este tot un număr natural*. *Diferența și cîmul a două numere naturale nu este totdeauna un număr natural*.

2. NUMERE ÎNTREGI

Mulțimea numerelor întregi este formată din numerele

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots$$

Mulțimea acestor numere se notează cu Z .

Deci,

$$Z = \{ \dots, -n, \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots \}.$$

Mulțimea numerelor întregi se introduce cu scopul ca diferența dintre două numere naturale a și b , pe care o notăm cu $a - b$, să fie definită oricare ar fi numerele naturale a și b .

Dacă $a > b$, atunci există un număr natural c și numai unul, astfel încît $a = b + c$. În acest caz, numărul natural c se numește diferența dintre a și b și se notează cu $a - b$.

Exemple:

$$5 - 3 = 2 \text{ (căci } 5 = 3 + 2);$$

$$7 - 4 = 3 \text{ (căci } 7 = 4 + 3);$$

$$12 - 8 = 4 \text{ (căci } 12 = 8 + 4) \text{ ș.a.}$$

Dacă $a = b$, atunci diferența $a - b$ se consideră că reprezintă numărul 0 și se scrie $a - b = 0$.

Exemplu:

$$5 - 5 = 0.$$

Dacă $a < b$, atunci prin semnul $a - b$ se desemnează numărul întreg $-(b - a)$.

Exemplu:

$$2 - 5 = -(5 - 2) = -3, \quad 3 - 8 = -5.$$

Observație. Mulțimea N a numerelor naturale este inclusă în mulțimea Z a numerelor întregi: $N \subset Z$.

3. NUMERE RAȚIONALE

Mulțimea numerelor raționale se introduce cu scopul ca cîțul dintre două numere întregi a și b care se notează cu semnul $\frac{a}{b}$ să fie definit oricare ar fi $a \in Z$, $b \in Z$ și $b \neq 0$.

Fie două numere întregi a și b ($b \neq 0$).

a) Dacă există un număr întreg c astfel încît $a = b \cdot c$, numărul c se numește cîțul dintre numărul întreg a și b și se notează cu semnul $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b} = c$).

Exemple:

$$1. \frac{8}{2} = 4, \text{ deoarece } 8 = 2 \cdot 4;$$

$$2. \frac{12}{-4} = -3, \text{ deoarece } 12 = (-3) \cdot (-4).$$

b) Dacă nu există nici un număr întreg c astfel încît $a = b \cdot c$, asociem perechii (a, b) un număr nou, neîntreg, notat cu semnul $\frac{a}{b}$ și numit tot *cîtul* dintre a și b . Astfel, perechii $(3, 4)$ i se va asocia un număr nou notat cu semnul $\frac{3}{4}$.

Un număr scris sub forma $\frac{a}{b}$ se spune că este scris sub formă de fracție, avînd numărătorul a și numitorul b ($b \neq 0$).

Orice număr care poate fi scris sub formă de fracție, avînd ca numărător un număr întreg, iar ca numitor un număr întreg diferit de 0, se numește *număr rațional*. Mulțimea numerelor raționale se notează cu litera Q .

Orice număr întreg a este în același timp un număr rațional, căci $a = \frac{a}{1}$. Așadar, $Z \subset Q$.

Exemple:

$$1. \frac{3}{4} \in Q, \quad \frac{-3}{2} \in Q, \quad \frac{5}{-6} \in Q, \quad \frac{-8}{-7} \in Q;$$

$$2. 2 \in Q \left(\text{căci } 2 = \frac{2}{1} \right), \quad -3 \in Q \left(\text{căci } -3 = \frac{-3}{1} \right), \quad 0 \in Q \left(\text{căci } 0 = \frac{0}{1} \right).$$

Se știe că două numere raționale $\frac{a}{b}$ și $\frac{a'}{b'}$ sînt egale dacă și numai dacă $ab' = a'b$ ($b \neq 0, b' \neq 0$).

Un număr rațional mai poate fi desemnat folosind și alte notații, dintre care notația sub formă zecimală este cea mai răspîndită.

Exemple:

$$1. 3 = 3,00; \quad -5 = -5,000;$$

$$2. \frac{1}{4} = 0,25; \quad \frac{-1}{8} = -0,125; \quad \frac{1}{-128} = -0,0078125;$$

$$3. \frac{1}{3} = 0,333...; \quad \frac{-1}{15} = -0,0666...; \quad \frac{-556}{-9\,900} = 0,05616161...$$

Numerelor raționale li se asociază o scriere zecimală, care poate începe eventual cu semnul „—”, cu un număr finit de zecimale (exemplele 1, 2) sau cu un număr infinit de zecimale, astfel încît există o cifră sau un grup de cifre care de la un moment dat se repetă neconținut (exemplele de la punctul 3).

Reciproc, oricărei succesiuni de cifre despărțite printr-o virgulă și precedate eventual de semnul „—”, cifrele care urmează după virgulă fiind în număr finit, sau conținînd o cifră sau un grup de cifre care de la un

moment dat se repetă neconținut, i se asociază un număr rațional (modul cum se exprimă numărul rațional desemnat cu scrierea zecimală sub formă de fracție este cunoscut din clasele anterioare).

Notă. Mulțimea numerelor raționale se va mai nota astfel:

$$Q = \{x \in R \mid x = \frac{a}{b} \text{ și } a \in Z \text{ și } b \in Z \text{ și } b \neq 0\}.$$

4. NUMERE IRAȚIONALE

Considerăm că orice succesiune infinită de cifre precedată eventual de semnul „—”, cifrele fiind despărțite printr-o virgulă, printre cifrele care urmează după virgulă, neexistând nici o cifră sau un grup de cifre care de la un moment dat să se repete neconținut, desemnează un număr nou, nerațional, numit număr *irațional*.

Evident că un număr irațional este un număr care nu se poate exprima sub forma $\frac{a}{b}$ (a și b întregi și $b \neq 0$).

Exemple:

0,7070070007...; -2,7182818...

a) Numerele iraționale exprimă măsura unor segmente incommensurabile. (Ex.: diagonala cu latura pătratului.)

b) Se demonstrează că numărul care exprimă raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său și care se notează cu semnul π este un număr irațional.

Avem: $\pi = 3,141592635 \dots$ (nici o cifră sau grupă de cifre nu se repetă neconținut).

c) Alte numere iraționale provin din extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr întreg și pozitiv care nu este pătrat perfect*. De exemplu să arătăm că rădăcina pătrată a numărului 3, adică numărul pozitiv x al cărui pătrat este $3(x^2 = 3)$ este un număr irațional, adică nu se poate scrie sub forma $\frac{p}{q}$, unde p este un număr întreg, iar q este un număr întreg diferit de 0.

În acest scop vom folosi metoda reducerii la absurd, metodă cunoscută de la geometrie. Presupunem că numărul pozitiv x cu proprietatea $x^2 = 3$ poate fi scris sub forma $\frac{p}{q}$ ($p \in Z$, $q \in Z$, $q \neq 0$). În acest caz putem admite că numerele de la numărător și numitor sînt prime între ele, căci dacă nu sînt, considerăm că prin $\frac{p}{q}$ s-a notat fracția care exprimă numărul x ,

* Numere iraționale se pot obține și prin alte operații care se vor învăța mai tîrziu.

obținută după ce s-a simplificat cu cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului. Deoarece $x = \frac{p}{q}$ și $x^2 = 3$, avem $3 = \frac{p^2}{q^2}$.

Fracția $\frac{p}{q}$ fiind ireductibilă, prin ipoteză, rezultă că și pătratul ei $\frac{p^2}{q^2}$ este tot o fracție ireductibilă. Aceasta înseamnă că fracția ireductibilă $\frac{p^2}{q^2}$ nu poate fi egală cu un număr întreg și, deci, egalitatea $\frac{p^2}{q^2} = 3$ este falsă. Prin urmare presupunerea făcută că numărul pozitiv x , care are proprietatea că $x^2 = 3$, poate fi scris sub forma $\frac{p}{q}$ (adică este număr rațional), ne-a condus la o contradicție. Rezultă că numărul pozitiv x , care are proprietatea că $x^2 = 3$ nu este număr rațional, ci un *număr irațional* care se notează, după cum se știe, cu semnul $\sqrt{3}$. Numărul $\sqrt{3}$ se mai notează și sub forma zecimală prin 1,732051... (Nici o zecimală sau grup de zecimale nu se repetă neconținut.)

În calculele practice, cu numere iraționale, se aproximează acestea cu numere raționale notate sub forma zecimală, obținute reținând numai câteva zecimale de la început, din scrierea zecimală a numerelor iraționale corespunzătoare.

5. NUMERE REALE

☞ Mulțimea numerelor raționale reunită cu mulțimea numerelor iraționale formează o mulțime care se numește *mulțimea numerelor reale*. Mulțimea numerelor reale se notează cu R .

Avem: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Observație. Mulțimea numerelor reale este formată din:

☞ a) *Numerele reale pozitive.* Mulțimea numerelor reale pozitive se va nota cu semnul R_+ . În notarea unui număr real pozitiv se scrie la început semnul „+”, iar dacă nu există posibilitatea vreunei confuzii se omite acest semn.

Exemple: $3 \in R_+$, $\frac{7}{5} \in R_+$, $\sqrt{3} \in R_+$, $\sqrt{2} \in R_+$.

Dacă un număr real este pozitiv se mai spune că numărul „are semnul plus”.

☞ b) *Numerele reale negative.* Mulțimea acestor numere se va nota cu semnul R_- . În notarea unui număr negativ se scrie la început semnul „-”.

Exemple: $-2 \in R_-$, $-\frac{3}{5} \in R_-$, $-5 \in R_-$, $-\sqrt{3} \in R_-$.

Dacă un număr este negativ se spune că „are semnul minus.”

X Avem: $R = R_+ \cup \{0\} \cup R_-$.

Asociem oricărui număr real x un număr real pozitiv notat cu semnul $|x|$ și numit *modulul* numărului x , în felul următor:

- Dacă x este pozitiv, $|x| = x$;
- Dacă $x = 0$, $|x| = 0$;
- Dacă x este negativ, $|x|$ este numărul real pozitiv obținut schimbând semnul numărului x .

Exemple:

$$|3| = 3, \quad \left|\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}, \quad |-4| = 4, \quad \left|-\frac{3}{8}\right| = \frac{3}{8}, \quad |0| = 0.$$

Este cunoscut procedeul prin care oricărui număr real i se poate asocia un punct al unei drepte și numai unul, dacă se alege un punct care să reprezinte numărul 0 numit *origine* și un punct care să reprezinte numărul 1 (segmentul care unește cele două puncte se numește *segment unitate*). În acest mod, oricărui punct îi corespunde un număr real și numai unul și orice număr real corespunde unui punct și numai unui. Acest număr se numește *abscisa* punctului. Această corespondență între puncte și numere ne permite să identificăm numerele cu punctele; vom mai spune *punctul* x în loc de numărul real x și *axa reală* sau *dreapta reală* în loc de mulțimea numerelor reale.

OPERAȚII. OPERAȚII CU NUMERE

Fie M o mulțime. Dacă printr-un procedeu facem să corespundă oricărei perechi (x, y) de elemente din M , un element și numai unul din M , se spune că am definit o operație internă pe mulțimea M .

Cele mai frecvente operații definite în mulțimile de numere de care ne vom ocupa mai departe sînt: adunarea, înmulțirea, scăderea și împărțirea.

Prin adunare (respectiv scădere) se asociază oricărei perechi de numere (x, y) un număr și numai unul, notat cu semnul $x + y$ (respectiv $x - y$).

Prin înmulțire (respectiv împărțire) se asociază oricărei perechi de numere (x, y) un număr și numai unul, notat cu semnul $x \cdot y$ (respectiv $\frac{x}{y}$).

Menționăm următoarea proprietate:

L_1 . Dacă egalitățile $a = b$ și $c = d$ sînt adevărate, atunci sînt adevărate și egalitățile $a + c = b + d$ și $ac = bd$.

Intr-adevăr, din faptul că $a = b$ și $c = d$ sînt adevărate rezultă că a și b sînt două notații diferite pentru un anumit element, iar c și d sînt, la fel, două notații diferite ale unui alt element. Rezultă că $a + c$ și

$b + d$ (respectiv $ac = bd$) sînt două notații diferite ale unui element din mulțimea considerată, și deci egalitatea $a + c = b + d$, respectiv $ac = bd$, este adevărată.

L_2 . Dacă egalitatea $a = b$ este adevărată, atunci este adevărată și egalitatea $a + c = b + c$, și $ac = bc$ oricare ar fi c din mulțimea considerată.

Într-adevăr, egalitatea $a = b$ fiind adevărată prin ipoteză, iar egalitatea $c = c$ fiind de asemenea adevărată (proprietatea de reflexivitate a egalității), rezultă aplicînd proprietatea L_1 că egalitățile $a + c = b + c$ și $ac = bc$ sînt adevărate.

Reamintim unele proprietăți ale operațiilor definite în mulțimile de numere cunoscute.

A. OPERAȚII ÎN MULȚIMEA NUMERELOR REALE (R)

a) *Adunarea* este operația prin care oricărei perechi de numere reale x și y îi corespunde un număr real și numai unul, notat $x + y$, și care are:

- semnul comun lui x și y , dacă x și y au același semn, iar ca modul suma modulelor;

- semnul numărului al cărui modul este mai mare și, ca modul, diferența modulelor, în cazul că numerele au semne diferite.

Exemple:

$$(+3) + (+5) = +8; \quad (-5) + (-6) = -11;$$

$$(-7) + (+4) = -3; \quad (+13) + (-8) = +5.$$

Numărul $x + y$ se numește *suma* numerelor x și y , iar numerele x și y se numesc *termenii sumei*.

b) *Înmulțirea* este operația prin care oricărei perechi de numere reale x și y îi corespunde un număr real și numai unul, notat cu xy (sau $x \cdot y$ sau $x \times y$) și care are:

- semnul „+” dacă x și y au același semn, iar ca modul produsul modulelor;

- semnul „-” dacă x și y au semne diferite, iar ca modul produsul modulelor.

Numărul xy se numește *produsul* numerelor x și y , iar acestea se numesc *factorii produsului*.

Exemple:

$$(+7) \cdot (+4) = +28;$$

$$(-6) \cdot (-3) = +18;$$

$$(+9) \cdot (-3) = -27;$$

$$(-5) \cdot (+4) = -20;$$

$$(+6) \cdot 0 = 0;$$

$$0 \cdot (-9) = 0;$$

$$0 \cdot 0 = 0.$$

Proprietățile adunării

$\times$ A_1 . Adunarea este asociativă, adică oricare ar fi numerele reale x, y, z , este adevărată egalitatea:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Valoarea comună a acestor sume se notează cu semnul $x + y + z$.

Exemplu: $(3 + 4) + 7 = 3 + (4 + 7)$, căci $(3 + 4) + 7 = 7 + 7 = 14$, iar $3 + (4 + 7) = 3 + 11 = 14$. Așadar, $3 + 4 + 7 = 14$.

$\times$ A_2 . Adunarea este comutativă, adică oricare ar fi numerele reale x și y , este adevărată egalitatea:

$$x + y = y + x.$$

Într-adevăr, valoarea unei sume nu se schimbă dacă se schimbă ordinea termenilor.

Exemplu: $(+9) + (-4) = (-4) + (+9) = +5$.

$\times$ A_3 . În R există un element notat cu 0 , cu proprietatea că oricare ar fi numărul real x , este adevărată egalitatea:

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

Numărul 0 se numește *element neutru* față de adunare.

Într-adevăr, orice număr real adunat cu 0 rămâne neschimbat.

Exemple: $(+5) + 0 = 0 + (+5) = +5$.

$$\left(-\frac{3}{4}\right) + 0 = 0 + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}.$$

$\times$ A_4 . Pentru orice număr real x există un număr real notat cu $-x$, cu proprietatea:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Numărul $-x$ se numește *opusul* lui x .

Exemple:

1. Opusul lui 2 este -2 , căci $(-2) + 2 = 2 + (-2) = 0$.

2. Opusul lui $-\frac{3}{4}$ este $\frac{3}{4}$, căci $\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = 0$.

În loc de $x + (-y)$ vom scrie $x - y$ și vom citi „diferența dintre numărul x și numărul y ”.

$\times$ Se știe că operația prin care se asociază oricărei perechi (x, y) de numere reale, numărul real $x - y$ se mai numește *scădere*.

Deoarece scăderea se reduce la adunarea unui număr cu opusul celui de-al doilea, în cele ce urmează nu vom considera decât operația de adunare.

Alte notații:

$$(-x) + y = -x + y;$$

$$(-x) + (-y) = -x - y.$$

Exemple:

$$(+3) - (-4) = (+3) + (+4) = 3 + 4 = +7;$$

$$(-5) - (+8) = (-5) + (-8) = -5 - 8 = -13;$$

$$(+8) - (+4) = (+8) + (-4) = +8 - 4 = +4;$$

$$(-7) - (-3) = (-7) + (+3) = -7 + 3 = -4.$$

Proprietățile înmulțirii

M_1 . *Înmulțirea este asociativă*, adică oricare ar fi numerele reale x, y, z este adevărată egalitatea:

$$(xy)z = x(yz).$$

Valoarea comună a acestor produse se notează cu xyz .

Exemplu:

$$[(-5) \cdot (+3)] \cdot (-2) = (-5) \cdot [(+3) \cdot (-2)],$$

$$[(-5) \cdot (+3)] \cdot (-2) = (-15) \cdot (-2) = 30,$$

iar

$$(-5) [(+3) \cdot (-2)] = (-5) \cdot (-6) = 30.$$

M_2 . *Înmulțirea este comutativă*, adică oricare ar fi numerele reale x, y , este adevărată egalitatea:

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Într-adevăr, produsul nu se schimbă dacă schimbăm ordinea factorilor.

Exemplu: $(+7) \cdot (-4) = (-4) \cdot (+7) = -28.$

M_3 . *În R există un element notat cu 1 cu proprietatea că oricare ar fi numărul real x avem:*

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

Numărul real 1 se mai numește *element neutru* pentru înmulțire sau *element unitate*.

† M_4 . Pentru orice număr real $x \neq 0$, există un număr real notat cu $\frac{1}{x}$ cu proprietatea că:

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$$

Numărul $\frac{1}{x}$ se numește *inversul* lui x .

În loc de $x \cdot \frac{1}{y}$ sau $\frac{1}{y} \cdot x$ (cele două produse sînt egale) vom scrie $\frac{x}{y}$ și vom citi citul dintre numărul real x și numărul real y . Operația prin care se asociază oricărei perechi (x, y) de numere reale ($y \neq 0$) numărul $\frac{x}{y}$ se numește *împărțire*.

Deoarece împărțirea se reduce la înmulțirea unui număr cu inversul celui de-al doilea, în cele ce urmează nu vom considera decît operația de înmulțire.

Proprietăți de legătură între adunare și înmulțire

AM. Înmulțirea este distributivă la stînga și la dreapta față de adunare, adică, oricare ar fi numerele x, y, z sînt adevărate egalitățile:

$$x \cdot (y + z) = xy + xz;$$

$$(y + z) \cdot x = yx + zx.$$

Dacă într-o mulțime sînt definite două operații, numite adunare și înmulțire, care au proprietăți analoge cu proprietățile $A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_3, M_4, AM$, se spune că cele două operații determină pe mulțimea respectivă o structură de corp.

Așadar, numerele reale formează corp, corpul numerelor reale.

Înmulțirea numerelor reale fiind comutativă (proprietatea M_2) se spune că corpul numerelor reale este comutativ.

01.10.1968

B. OPERAȚII ÎN MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE ($\mathbb{Q}$)

Mulțimea numerelor raționale este, după cum s-a văzut, mulțimea

$$Q = \left\{ x \in R \mid x = \frac{a}{b} \text{ și } a \in Z \text{ și } b \in Z \text{ și } b \neq 0 \right\}.$$

S-a subliniat că două numere raționale $\frac{a}{b}$ și $\frac{a'}{b'}$ sînt egale dacă și numai dacă $ab' = a'b$. Numerele raționale $\frac{a}{b}$ și $\frac{ca}{cb}$ ($c \neq 0$) sînt egale pentru că $a \cdot (cb) = (ca) \cdot b$. Deci:

$$\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}.$$

Aceasta ne arată că dacă se înmulțesc numărătorul și numitorul unei fracții care desemnează un număr rațional, cu un număr întreg $c \neq 0$, se obține un număr rațional egal.

Pe această proprietate se bazează simplificarea și amplificarea fracțiilor pe care le presupunem cunoscute. Folosind amplificarea, aducem fracțiile la același numitor, sau transformăm fracțiile astfel ca să aibă numitorii pozitivi.

Exemple:

1. Să se aducă numerele $-\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ și $\frac{2}{3}$ la același numitor.

Avem:

$$\overset{12}{-\frac{4}{5}} = -\frac{48}{60}; \quad \overset{15}{\frac{3}{4}} = \frac{45}{60}; \quad \overset{20}{\frac{2}{3}} = \frac{40}{60}.$$

2. Să se scrie numerele raționale $\frac{3}{-5}$, $\frac{-2}{-3}$ cu numitorii pozitivi.

Avem:

$$\overset{-1}{\frac{3}{-5}} = \frac{-3}{5}; \quad \overset{-1}{\frac{-2}{-3}} = \frac{2}{3}.$$

Să cercetăm dacă și în această mulțime se regăsesc toate proprietățile celor două operații, adunarea și înmulțirea, care au loc în mulțimea numerelor reale.

Proprietățile adunării

(Admitem cunoscută regula după care asociem oricărei perechi de numere raționale $\frac{a}{b}$ și $\frac{a'}{b'}$ un număr rațional $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}$ numit suma celor două numere raționale.)

A_1 . Adunarea este asociativă, adică oricare ar fi numerele raționale $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$, este adevărată egalitatea:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) + \frac{a''}{b''} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a'}{b'} + \frac{a''}{b''}\right).$$

A_2 . Adunarea este comutativă, adică oricare ar fi numerele raționale $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$, este adevărată egalitatea:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{a'}{b'} + \frac{a}{b}.$$

A_3 . În Q există un element, elementul 0 $\left(0 = \frac{0}{1}\right)$, cu proprietatea că oricare ar fi numărul rațional $\frac{a}{b}$, avem:

$$\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Numărul 0 este element neutru față de adunare.

A_4 . Pentru orice număr rațional $\frac{a}{b}$ există un număr rațional notat $-\frac{a}{b}$ cu proprietatea:

$$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b} = 0.$$

Numărul $-\frac{a}{b}$ este opusul lui $\frac{a}{b}$. Avem: $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

În loc de $\frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{b}\right)$ vom scrie $\frac{a}{b} - \frac{c}{b}$ și vom citi diferența dintre numerele $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{b}$.

Diferența a două numere raționale este tot un număr rațional.

Proprietățile înmulțirii

Admitem cunoscută regula după care oricărei perechi de numere raționale $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ îi asociem un număr rațional $\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$.

M_1 . Înmulțirea este asociativă adică oricare ar fi numerele raționale $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$ este adevărată egalitatea:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'}\right) \cdot \frac{a''}{b''} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a'}{b'} \cdot \frac{a''}{b''}\right).$$

M_2 . Înmulțirea este comutativă, adică oricare ar fi numerele raționale $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$, este adevărată egalitatea:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{a}{b}.$$

M_3 . În Q există un element, elementul 1 $\left(1 = \frac{1}{1}\right)$, cu proprietatea că oricare ar fi numărul rațional $\frac{a}{b}$, avem:

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Numărul $1 = \frac{1}{1}$ este *elementul neutru* pentru înmulțire sau *element unitate*.

M_4 . Pentru orice număr rațional $\frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} \neq 0\right)$, există un număr rațional notat cu $\frac{1}{\frac{a}{b}}$ cu proprietatea că:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\frac{a}{b}} \cdot \frac{a}{b} = 1; \quad \left(\text{Avem } \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}\right).$$

$$\text{Așadar, } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1.$$

Numărul $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ se numește *inversul* lui $\frac{a}{b}$.

Deci, cîtu a două numere raționale este un număr rațional. Prin urmare, a împărți două numere raționale înseamnă să înmulțim primul număr cu inversul celui de-al doilea:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Proprietăți de legătură între adunare și înmulțire

AM. Înmulțirea este distributivă la stînga și la dreapta față de adunare, adică oricare ar fi numerele raționale $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, sînt adevărate egalitățile:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a'}{b'} + \frac{a''}{b''} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} + \frac{a}{b} \cdot \frac{a''}{b''}$$

și

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} \right) \frac{a''}{b''} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a''}{b''} + \frac{a'}{b'} \cdot \frac{a''}{b''}.$$

Observăm că în mulțimea numerelor raționale operațiile de adunare și înmulțire au proprietățile A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , M_1 , M_3 , M_4 și AM. Prin urmare, cele două operații determină pe mulțimea Q o structură de corp.

Așadar, numerele raționale Q formează corp, corpul numerelor raționale. Acest corp este de asemenea comutativ.

C. OPERAȚII ÎN MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI (Z)

Mulțimea numerelor întregi $Z = \{ \dots -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots \}$ este o submulțime a numerelor reale, adică $Z \subset R$.

Să cercetăm dacă în această mulțime se regăsesc toate proprietățile celor două operații semnalate la numere reale și raționale.

Proprietățile adunării

A_1 . Adunarea este asociativă, adică oricare ar fi numerele întregi a, b, c este adevărată egalitatea:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

A_2 . Adunarea este comutativă, adică oricare ar fi numerele întregi a, b , este adevărată egalitatea:

$$a + b = b + a.$$

A_3 . În Z există un element, elementul 0, cu proprietățile că oricare ar fi numărul întreg a , avem:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Numărul 0 este elementul neutru față de adunare.

A_4 . Pentru orice număr întreg a există un număr întreg, numărul $-a$, cu proprietatea:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Numărul $-a$ este opusul lui a .

În loc de $a + (-b)$ se mai scrie $a - b$ și se citește diferența numerelor a și b .

Diferența dintre două numere întregi este tot un număr întreg.

Proprietățile înmulțirii

M_1 . Înmulțirea este asociativă, adică oricare ar fi numerele întregi a, b, c , este adevărată egalitatea:

$$(ab)c = a(bc).$$

M_2 . Înmulțirea este comutativă, adică, oricare ar fi numerele întregi a, b , este adevărată egalitatea:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

M_3 . În Z există un element notat cu 1 cu proprietatea că oricare ar fi numărul întreg a , avem:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Numărul 1 este elementul neutru pentru înmulțire sau element unitate.

Operația de înmulțire în mulțimea numerelor întregi nu are proprietatea M_4 , în sensul că nu există, pentru orice număr întreg a ($a \neq 0$ și $a \neq 1$) un invers $\frac{1}{a}$ care să aparțină lui Z . (De exemplu: $3 \in Z$, dar $\frac{1}{3} \notin Z$).

Citul a două numere întregi nu este un număr întreg.

Observăm că în mulțimea numerelor întregi operațiile de adunare și înmulțire au proprietățile $A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3$ și AM, dar înmulțirea nu are proprietatea M_4 . Prin urmare, mulțimea numerelor întregi nu formează corp.

Dacă într-o mulțime sînt definite două operații numite adunare și înmulțire satisfăcînd proprietăți analoge cu $A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, AM$, se spune că acestea determină pe mulțimea respectivă o structură de inel. Dacă este satisfăcută proprietatea M_2 se spune că inelul este comutativ, iar dacă satisface proprietatea M_3 se spune că inelul este cu element unitate.

Așadar, numerele întregi formează inel, inelul numerelor întregi. Acest inel este comutativ și posedă element unitate.

Corpul sau inelul se spune că sînt structuri algebrice.

Cunoașterea structurii algebrice a unei mulțimi este importantă deoarece regulile de calcul depind, în esență, de structura respectivă corp,

inel etc. și nu de natura obiectelor mulțimii. O dată stabilite regulile de calcul, de exemplu, într-un corp oarecare, acestea vor putea fi aplicate în orice corp care intervine în studiul nostru.

Deoarece mulțimea cea mai frecvent utilizată în algebra elementară este mulțimea numerelor reale care formează corp comutativ, vom sublinia în continuare câteva proprietăți care sînt valabile în orice corp comutativ și deci, în particular, în mulțimea numerelor reale și prin urmare în orice submulțime a acesteia.

primă oare

**Reguli de calcul
într-un corp comutativ**

P_1 . Dacă „ $a = 0$ sau $b = 0$ “, atunci „ $ab = 0$ “ și reciproc dacă „ $ab = 0$ “, atunci „ $a = 0$ sau $b = 0$ “.

P_2 . Regula semnelor la înmulțire.

P_3 . Regula după care, pentru a înmulți o sumă cu o altă sumă trebuie să înmulțim fiecare termen al primei sume cu fiecare termen al celeilalte sume, în particular, formule de calcul prescurtat.

P_4 . Regulile calculului cu puteri.

P_5 . Regulile de calcul cu fracții, în particular amplificarea și simplificarea.

Demonstrația proprietății P_1

a) Fie $a = 0$. Să arătăm că $a \cdot b = 0$, adică $0 \cdot b = 0$.

Avem:

$0 \cdot b = (0 + 0) \cdot b$. Aplicînd proprietatea de distributivitate AM deducem:

$0 \cdot b = 0 \cdot b + 0 \cdot b$. Adunînd în ambii membri ai acestei egalități opusul elementului $0 \cdot b$, adică elementul notat cu semnul $-(0 \cdot b)$, obținem:

$-(0 \cdot b) + (0 \cdot b) = -(0 \cdot b) + [0 \cdot b + 0 \cdot b]$. De aici deducem folosind proprietatea A_3 în membrul stîng și asociativitatea adunării în membrul drept:

$$0 = [-(0 \cdot b) + 0 \cdot b] + 0 \cdot b, \text{ de unde}$$

$$0 = 0 + 0 \cdot b \text{ sau}$$

$$0 = 0 \cdot b \text{ și deci,}$$

$$0 \cdot b = 0.$$

b) Fie $a \cdot b = 0$ și să admitem $a \neq 0$. În acest caz există $\frac{1}{a}$ cu proprietatea că $\frac{1}{a} \cdot a = 1$. Înmulțind egalitatea $ab = 0$ în ambii membri cu $\frac{1}{a}$ obținem:

$$\frac{1}{a} \cdot (ab) = \frac{1}{a} \cdot 0 \text{ sau } \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = \frac{1}{a} \cdot 0 \text{ sau } 1 \cdot b = \frac{1}{a} \cdot 0 \text{ sau } b = 0 \text{ și deci}$$

ca $a \cdot b$ să fie 0 trebuie ca cel puțin unul din factori să fie 0.

Demonstrația proprietății P_2

Să arătăm că într-un corp sînt adevărate următoarele egalități:

a) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab);$

b) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b;$

c) $-(-a) = a.$

a) Avem:

$$[(-a) + a] \cdot b = (-a) \cdot b + a \cdot b \quad (\text{distributivitatea}) \text{ sau}$$

$$0 \cdot b = (-a) \cdot b + a \cdot b \text{ sau}$$

$$0 = (-a) \cdot b + ab.$$

Adunînd în ambii membri numărul $-(ab)$ obținem:

$$0 + (-a \cdot b) = (-a) \cdot b + ab + [-(a \cdot b)] \text{ sau}$$

$$-(a \cdot b) = (-a) \cdot b + ab + [-(ab)] \text{ sau}$$

$$-(a \cdot b) = (-a) \cdot b + 0 \text{ sau}$$

$$-(a \cdot b) = (-a) \cdot b, \text{ de unde,}$$

$$(-a) \cdot b = -(ab).$$

Consecință. $(-1)b = -b$. Într-adevăr $(-1) \cdot b = -(1 \cdot b) = -b$

În mod analog se demonstrează punctele b și c.

Demonstrația proprietății P_3

Să arătăm, de exemplu, că:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

În acest scop să notăm cu x suma $c + d$. Avem

$$(a + b)(c + d) = (a + b)x = ax + bx = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

S-a aplicat distributivitatea la stînga și la dreapta.

Demonstrația pentru cazul general se bazează pe aceeași idee.

P_4 . Regulile de calcul cu puteri

Puterile naturale ale unui număr real se definesc prin egalitățile:

$$a^1 = a \text{ și } a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factori}}, \text{ dacă } n > 1 \cdot (n \in N).$$

Avem:

$$1^n = 1 \text{ și } 0^n = 0, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Proprietăți:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^{m+n};$$

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_m = \underbrace{a^{n+n+\dots+n}}_{m \text{ termeni}} = a^{mn};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0);$$

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_n = a^n b^n.$$

Observație. Este evident că: puterea unui număr pozitiv este tot un număr pozitiv; puterea unui număr negativ este un număr pozitiv dacă exponentul este par și este un număr negativ dacă exponentul este impar.

Exemple:

$$\left(+\frac{2}{3}\right)^2 = +\frac{4}{9}; \quad \left(+\frac{2}{3}\right)^3 = +\frac{8}{27};$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = +\frac{1}{4}; \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = +\frac{1}{16};$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}; \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}.$$

EXERCITII

1. Să se scrie în toate modurile posibile mulțimea primelor patru numere naturale schimbând ordinea elementelor.
2. Să se scrie mulțimea divizorilor pozitivi ai numărului 12.
3. Să se scrie mulțimea multiplilor numărului 3 cuprinși între 10 și 20.
4. Fie A mulțimea divizorilor pozitivi ai numărului 20 și $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. Să se arate că $A = B$.
5. Să se scrie folosind semnul „ $\in$ ” toate propozițiile care determină următoarea construcție:
 - a) se construiesc trei drepte concurente D_1 , D_2 și D_3 și se notează cu O punctul de concurență.
 - b) pe dreapta D_1 se alege un punct A și pe dreapta D_2 se alege un punct B ; se notează cu D dreapta AB și cu C punctul unde dreapta D intersectează dreapta D_3 .
6. Patru persoane A, B, C, D fac următoarele afirmații:

A : „ B este vinovat”.

B : „ A minte”.

C: „Eu nu sînt vinovat“.

D: „A este vinovat“.

- Dacă o singură afirmație este adevărată, cine este vinovat?
- Dacă o singură afirmație este falsă, cine este vinovat?
- În cîte feluri se poate ca exact două afirmații să fie adevărate?

7. Să se dea trei exemple de propoziții adevărate și trei exemple de propoziții false.

8. Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $x \in A$. Determinați pe x astfel încît următoarele propoziții să fie adevărate:

a) $x^2 - 4 = 0$; b) $x^2 - 1 = 0$; c) $2x + 2 = 0$.

9. Să se determine numerele naturale x și y astfel încît următoarele propoziții să fie adevărate:

a) $3x + 2y = 18$; b) $2x + y = 16$.

10. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ și propozițiile.

$$x - y + 2z = 4 \quad (x \in A, y \in A, z \in A);$$

$$2x + y + z = 32 \quad (x \in A, y \in A, z \in A).$$

Determinați pe x, y, z astfel încît afirmația „ $x - y + 2z = 4$ și $2x + y + z = 32$ ” să fie adevărată.

11. Determinați numerele naturale x și y astfel încît următoarea afirmație să fie adevărată:

$$„x + y = 5 \text{ sau } 2x + y = 6”.$$

12. Fie A mulțimea divizorilor lui 12 și B mulțimea divizorilor lui 24. Să se arate că $A \subset B$.

13. Fie mulțimile $A = \{1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ și $C = \{1, 2, 3, 4\}$.

Care dintre următoarele relații este adevărată și care este falsă: $A \subset B$, $B \subset A$, $A \subset C$, $C \subset A$, $B \subset C$ și $C \subset B$?

14. Să se scrie toate submulțimile mulțimii $\{1, 2, 3\}$.

15. Scrieți prin elemente următoarele mulțimi:

- $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este un divizor comun al numerelor } 12 \text{ și } 18\}$.
- $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este un multiplu comun al numerelor } 3 \text{ și } 4 \text{ cuprins între } 30 \text{ și } 40\}$.
- $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este un divizor prim al numerelor } 20 \text{ și } 30\}$.

(Prin $\mathbb{N}$ s-a notat mulțimea numerelor naturale.)

16. Să se scrie prin elemente următoarele mulțimi:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n \text{ și } n \in \mathbb{N}\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n \text{ și } n \in \mathbb{N}\}.$$

17. Fie $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n \text{ și } n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 4n \text{ și } n \in \mathbb{N}\}$.

Să se arate că $B \subset A$.

18. Fie $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se arate că:

a) $\{x \in M \mid 2x + 3 = 6\} = \emptyset$; b) $\{x \in M \mid x^2 = 3\} = \emptyset$.

19. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{4, 5, 6\}$. Aflați mulțimea $A \cup B$.

20. Determinați toate mulțimile X , astfel încît $\{1, 2, 3\} \cup X = \{1, 2, 3, 4\}$.

21. Arătați că dacă $A \cup B = A$, atunci $B \subset A$ și reciproc dacă $B \subset A$, atunci $A \cup B = A$.

22. Determinați următoarea mulțime:

$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{a, 2a\}$, unde a reprezintă un număr natural. Se vor cerceta cazurile $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$, $a > 4$.

23. Să se afle mulțimile:

$$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\}; \quad \{x, y, z, t\} \cap \{x, u, v, t\}; \quad \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\}.$$

24. Determinați toate mulțimile X de numere naturale cuprinse între 1 și 4 astfel încât:

$$X \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}.$$

25. a) Din relația $X \cup A = Y \cup A$ rezultă $X = Y$?

b) Din relația $X \cap A = Y \cap A$ rezultă $X = Y$?

26. Să se afle mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 7\} \cap \{1, 4, 3\}$.

27. Să se afle mulțimea:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este un divizor al lui } 12\} - \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este un divizor al lui } 20\}.$$

28. Să se afle mulțimile:

$$\{1, 2, 3, 4\} - \{3, 4\}; \quad \{1, 2, 3, 4\} - \{5, 6\}.$$

29. Să se calculeze sumele:

$$(-13) + (-9); (-39) + (+45); (-31) + 0; 0 + (-7);$$

$$(+2) + (-3) + (-7) + (+3) + (+11);$$

$$(-3) + (-4) + (+7) + (-3) + (+6) + (+3).$$

30. Să se efectueze sumele aplicând proprietățile adunării:

$$-13 + 21 - 4 + 14 - 6; 4 - 8 + 6 - 3 - 7;$$

$$-7 + 9 - 15 - 10; 32 - 154 + 50 - 64.$$

31. Să se efectueze scăderile:

$$(+8) - (+2); (-8) - (+1); (-13) - (+15); (-9) - (+9);$$

$$(-6) - (-3); (+12) - (-8); (+5) - (+5); (+8) - (-8).$$

32. Să se efectueze, reducându-le la sume algebrice:

$$(-4) - (-5) - (-8) + (+5) + (-7); (-11) + (-5) - (-7) - (+7) \cdot (-18);$$

$$(-4) - (-3) + (-3) - (-5) - (-6) - (+17).$$

33. Să se calculeze numărul x definit prin egalitatea $x = a - b - c$, știind că:

$$\text{a) } a = -2, b = +4, c = -3; \text{ b) } a = +3, b = -6, c = 1.$$

34. Să se efectueze înmulțirile:

$$(-5) \cdot (+6); (-4) \cdot (-16); (-8) \cdot 0; (0) \cdot (0);$$

$$(-6) \cdot (-1); 0 \cdot (+6); (-5) \cdot (+1).$$

35. Să se calculeze numărul x definit de formulele:

$$x = abc; x = ab - bc - ac,$$

$$\text{pentru } a = 3, b = -5, c = -2; a = -3, b = -7, c = -1.$$

36. Să se simplifice:

$$\frac{65 \cdot 7 \cdot 18}{6 \cdot 13 \cdot 15}; \quad \frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2}{5^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2}.$$

37. Să se efectueze:

$$\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right) - \left(+\frac{17}{24}\right);$$

$$\frac{\frac{25}{16} - \frac{16}{25}}{\frac{5}{4} + \frac{4}{5}}; \quad 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{17}{8} + \frac{15}{40}}}$$

+ 38. Să se efectueze:

$$\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{8}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{6}\right);$$

$$\frac{\frac{10}{11} + \frac{10}{9}}{2 + \frac{1}{3}} \cdot \frac{1 - \frac{4}{11}}{\frac{48}{5} + \frac{472}{55}}$$

+ 39. Să se efectueze:

$$[(-3)^3 + (-2)^3] : \left[-2 - (+3 - 5) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) - 1\frac{1}{2}\right];$$

$$\left(-\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) - \left[(-2)^3 + \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\right] - \frac{89}{12}.$$

$$\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right) - \left(+\frac{17}{24}\right)$$

$$-\frac{3}{8} - \frac{4}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{12} - \frac{17}{24} = \frac{-9 - 32 + 20 + 2 - 17}{24} = \frac{-36}{24} = -\frac{3}{2}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{8}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{6}\right)$$

$$\frac{3}{6} + \frac{16}{30} = \frac{15 + 16}{30} = \frac{31}{30}$$

$$\begin{array}{r} 113 \\ 89 \\ \hline 202 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 9 \\ \hline -41 \\ +20 \\ \hline -21 \\ +2 \\ \hline -19 \\ -17 \\ \hline -36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \cdot 12 \\ + 0 \\ \hline 420 \end{array}$$

CAPITOLUL II

CALCUL ALGEBRIC

1. EXPRESII ALGEBRICE

08.10.1968

Fie R corpul numerelor reale și literele $x, y, z, \dots$ prin care vom desemna numere reale neprecizate. Folosind și semne cu care se notează operațiile definite în R ($+$, $-$, $\cdot$, $-$ etc.), precum și semne cu care se notează numere reale determinate (ex.: 2 , -5 , $\frac{3}{4}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{5}{2}}$ etc.) putem obține o succesiune de semne care să desemneze tot un număr real neprecizat și care se numește *expresie algebrică*. Literele care intervin într-o expresie algebrică se numesc *variabile*. Semnele prin care notăm elemente determinate ale mulțimii R (ex.: 1 , $\frac{3}{4}$, $-\sqrt{2}$) se numesc *constante*.

Admitem că literele reprezintă acele numere reale pentru care operațiile ce apar în expresia algebrică considerată sînt definite.

O expresie care conține numai variabila x se va nota cu o literă însoțită în dreapta de o paranteză în care se trece litera x .

Exemplu:

$$E(x) = x^2 - 5x + x^3 - 4 + 3x.$$

O expresie care conține numai două variabile x și y se va nota cu o literă însoțită de o paranteză în care se trec literele x și y despărțite printr-o virgulă.

Exemplu:

$$F(x, y) = \frac{x + y - 5xy}{x^2 - 5x^3y}.$$

Se întrebuintează notații analoge în cazul cînd expresia conține mai multe variabile.

Valoarea numerică a unei expresii algebrice

Noțiunea de valoare numerică a unei expresii algebrice va reieși din următoarele exemple.

Exemplul 1. Fie expresia algebrică:

$$E(x, y) = -2x^2 + 3xy + 4y^2 - x - 3y + 2.$$

Înlocuind pe x cu 3 și pe y cu -2 obținem o succesiune de semne care desemnează o constantă numită *valoarea numerică a expresiei $E(x, y)$ pentru sistemul de valori $x = 3$ și $y = -2$* . Aceasta se notează cu $E(3, -2)$. Așadar,

$$E(3, -2) = -2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2)^2 - 3 - 3 \cdot (-2) + 2 = -15.$$

Analog, deducem că:

$$E(-1, 0) = 1, E(4, 2) = 0.$$

Exemplul 2. Fie expresia algebrică:

$$F(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}.$$

Valoarea numerică a expresiei $F(x)$ pentru $x = -1$, notată cu $F(-1)$ se obține înlocuind pe x cu -1 . Avem:

$$F(-1) = \frac{2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1}{-1 - 2} = -2.$$

Analog, deducem că:

$$F(-0,5) = -1,2; F(1) = \frac{0}{-1} = 0; F(3) = 10.$$

Se trec rezultatele obținute într-un tablou, numit tablou de valori, în felul următor:

x	-1	$-0,5$	1	3
$F(x)$	-2	$-1,2$	0	0

Observație. În cazul expresiei date, deoarece x desemnează orice număr real pentru care operațiile care intervin sînt definite (au sens), trebuie să luăm $x \neq 2$ (dacă $x = 2$ numitorul fracției este 0 și fracția nu are sens). Se spune că expresia $F(x)$ este definită pentru orice $x \neq 2$.

2. MONOM

O succesiune de semne, între care primul este o constantă, iar următoarele sînt variabile diferite despărțite între ele prin semnul consacrat operației de înmulțire (în particular pot figura semnele consacrate puterilor) constituie o expresie algebrică numită *monom*. Constanta se numește *coeficientul mo-*

nomului, iar partea care urmează, formată din litere, se numește *partea literală*.

Exemple:

1. $7x^2yz^3$. Coeficientul este 7, iar partea literală este x^2yz^3 .
2. $-\frac{3}{4}x$. Coeficientul este $-\frac{3}{4}$, iar partea literală este x .
3. x^3 . Coeficientul este 1, căci $x^3 = 1 \cdot x^3$, iar partea literală este x^3 .
4. $-xy^3$. Coeficientul este -1 , căci $-xy^3 = (-1)xy^3$, iar partea literală este xy^3 .

Pentru a evita complicațiile de limbaj vom admite că și constantele sînt monoame.

Exemplu: Vom spune în loc de constanta 3, monomul 3.

Gradul unui monom

a) Dacă monomul conține o singură variabilă exponentul puterii la care se află aceasta se numește *gradul monomului*.

Exemple:

1. $3x^4$. Acest monom este de gradul 4 căci variabila x figurează la puterea a patra.
2. $-5y^3$. Acest monom este de gradul 3.
3. $4z$. Acest monom este de gradul 1 ($4z = 4 \cdot z^1$).

b) Dacă monomul conține mai multe variabile, prin *gradul monomului* se înțelege suma exponenților puterilor la care figurează variabilele.

Exemple:

1. $5x^2y^3z^5$. Acest monom este de gradul 10 deoarece $2 + 3 + 5 = 10$.
2. $5xy^4z$. Acest monom este de gradul 6 deoarece $1 + 4 + 1 = 6$.

Exponentul puterii la care figurează o variabilă se numește *gradul monomului în raport cu acea variabilă*.

Exemplu:

$12x^2y^5z^3$. Acest monom este de gradul 10.

În raport cu variabila x monomul este de gradul 2, în raport cu variabila y este de gradul 5, iar în raport cu z este de gradul 3.

Observație. Constantelor le asociem, prin convenție, gradul 0.

Operații cu monoame

a) *Adunarea. Monoame asemenea.* Două sau mai multe monoame se numesc asemenea dacă sînt formate din aceleași variabile și fiecare variabilă figurează la aceeași putere în toate monoamele. (Monoamele asemenea diferă numai prin coeficienți.)

Exemple:

$$1. 2x^2yz^3, -3x^3yz^3, \frac{5}{3}x^2yz^3.$$

$$2. x, 2x, 3x, -3x, -5x \text{ (monoame de gradul 1).}$$

$$3. x^2, \frac{1}{4}x^2, 3x^2, -x^2 \text{ (monoame de gradul 2).}$$

Deoarece monoamele reprezintă elemente dintr-un corp comutativ (corpul numerelor reale) regulile de calcul cu acestea sînt regulile de calcul în orice corp comutativ.

Vom arăta întîi cum se adună monoamele asemenea.

Se știe că în orice corp $(b + c)a = ba + ca$ sau $ba + ca = (b + c)a$ (proprietatea AM).

Avem, de exemplu:

$$3x^3 + 5x^3 = (3 + 5)x^3 = 8x^3, \text{ oricare ar fi } x \in R.$$

$$7x^2y - 8x^2y = [7 + (-8)]x^2y = (-1)x^2y = -x^2y, \text{ oricare ar fi } x \in R, y \in R.$$

$$9x^2y^3z - 8x^2y^3z = [9 + (-8)]x^2y^3z = 1 \cdot x^2y^3z, \text{ oricare ar fi } x \in R, y \in R, z \in R.$$

$$3x^2 + 5x^2 + 8x^2 = (3x^2 + 5x^2) + 8x^2 = (3 + 5)x^2 + 8x^2 = (3 + 5 + 8)x^2 = 16x^2, \text{ oricare ar fi } x \in R.$$

Observăm că suma mai multor monoame asemenea este un monom asemenea cu ele, avînd coeficientul egal cu suma coeficienților monoamelor date. Acestei operații i se mai spune *reducerea termenilor asemenea*.

Observație. Oricărui monoame care nu sînt asemenea, le asociem o expresie algebrică, care nu mai este un monom, numită *suma* celor două monoame. În cazul monoamelor $5x^2y$ și $7x^3y^5$ suma va fi expresia algebrică $5x^2y + 7x^3y^5$.

b) *Înmulțirea monoamelor.* Se știe că produsul a două sau mai multe puteri ale aceleiași baze este tot o putere a bazei respective, care are ca exponent suma exponentilor. Exemplu: $x^2 \cdot x^4 = x^6$.

1) Produsul monoamelor care conțin aceeași variabilă.

Exemple:

$$1. x^2 \cdot x^5 = x^7.$$

$$2. 3x^4 \cdot 2x^3 = (3 \cdot 2) \cdot x^4 \cdot x^3 = 6x^4x^3 \text{ (am aplicat proprietatea de comutativitate, schimbînd ordinea factorilor } x^4 \text{ și } 2; \text{ a intervenit și proprietatea de asociativitate).}$$

$$3. 3y \cdot 5y^3 \cdot 7y^2 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot y \cdot y^3y^2 = 105y^6.$$

2) Produsul monoamelor care conțin mai multe variabile.

În acest caz folosindu-se comutativitatea înmulțirii se schimbă ordinea factorilor astfel încât primii factori să fie coeficienții monoamelor considerate, iar factorii următori să fie formați din grupe formate din aceeași literă.

Exemple:

$$(3x^2y) \cdot (5x^3y^4) = (3 \cdot 5) (x^2 \cdot x^3) \cdot (y \cdot y^4) = 15x^5y^5.$$

$$(8x^2yz) \cdot 3x \cdot (5y^2z) = (8 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (x^2 \cdot x) (y \cdot y^2) (z \cdot z) = 120x^3y^3z^2.$$

Am pus în evidență că:

Produsul a două sau mai multe monoame este un monom care conține toate variabilele monoamelor factori și al cărui coeficient este produsul coeficienților monoamelor factori, iar exponentul puterii la care se ridică fiecare variabilă este suma exponenților puterilor la care figurează variabila respectivă în monoamele factori.

Folosind regula enunțată mai înainte avem, de exemplu:

$$1. \left(\frac{2}{3} x^7y^2z^2\right) \cdot (-7xy^3) \cdot \left(-\frac{3}{2} x^2yz^3\right) = \frac{2}{3} \cdot (-7) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{7+1+2} \cdot y^{2+3+1} \cdot z^{2+3} = \\ = 7x^{10}y^6z^5.$$

$$2. (-4x^2z^3) \cdot \left(-\frac{1}{2} xy^5\right) \cdot \left(-\frac{5}{2} xt^3\right) \cdot (y^2z^2t) = -5x^3y^7z^6t^4.$$

c) *Ridicarea la o putere de exponent natural a unui monom.* Se știe că pentru a ridica o putere la altă putere se menține baza și se înmulțesc exponenții.

Exemplu: $(x^2)^4 = x^8$. În cazul monoamelor vom mai folosi și proprietatea care afirmă că pentru a ridica un produs la o putere, ridicăm fiecare factor la acea putere.

Exemple:

$$(3x^2 \cdot y^4z^3)^3 = 3^3 \cdot (x^2)^3 \cdot (y^4)^3 \cdot (z^3)^3 = 27x^6y^{12}z^9;$$

$$(-5x^2)^3 = (-5)^3 \cdot (x^2)^3 = -125x^6.$$

d) *Împărțirea a două monoame.* Se știe că: $x^n : x^k = x^{n-k}$, dacă $n, k \in \mathbb{N}$, și $n > k$, deoarece $x^{n-k} \cdot x^k = x^n$.

Observație. Dacă exponenții deîmpărțitului și împărțitorului sînt egali ($n = k$), rezultă că:

$$x^n : x^n = \frac{x^n}{x^n} = 1.$$

Pentru a găsi cîțul a două monoame împărțim coeficienții între ei și părțile literale între ele. Cîțul dintre coeficienți va fi coeficientul cîțului, iar fiecare literă se va lua cu un exponent egal cu diferența exponenților literei respective.

Exemplu: $24a^3x^4 : (-6ax^2)$.

Citul se obține din împărțirea coeficienților $24 : (-6) = -4$ și împărțirea puterilor aceleiași baze ($a^3 : a = a^2$, $x^4 : x^2 = x^2$).

Alte exemple:

1. $18a^3y^2 : 4a^2y = 4,5ay$.

2. $-16x^4y^5z^8 : 6x^2y^3z^5 = -\frac{8}{3}x^2y^2z^3$.

3. $-14a^3b^3c^3 : (-7ab^2c) = 2a^2bc^2$.

Observație. Dacă o literă figurează la împărțitor cu un exponent mai mare decât la deîmpărțit (ex. $4x^2 : 2x^5$) sau figurează numai la împărțitor (ex. $5x^4y^3 : z^2$), prin împărțire nu obținem un monom.

EXERCITII (I)

1. Să se calculeze sumele:

a) $(-7x^2z) + \left(2\frac{1}{3}x^2z\right) + (0,6x^2z) + (x^2z)$;

b) $(2\sqrt{2}ztu^2) + (0,01ztu^2) + (-3\sqrt{2}ztu^2) + (-0,1ztu^2) + (\sqrt{2}ztu^2) + (-0,91ztu^2)$;

c) $(2x^2y^a) + (-3x^2y^a) + \left(\frac{1}{3}x^2y^a\right) + (0,5x^2y^a)$ ($a \in \mathbb{N}$).

2. Să se reducă termenii asemenea din expresiile:

a) $3x^2y - 2yz^2 + 1,5x^2y + \frac{1}{2}yz^2$;

b) $\underline{2x^3 + 3,4x^2 - 2,5x^3 + 0,6x^2 - 3x + 2 + 0,5x^3}$; = 6

c) $x^2y + 2xy^2 + 1,5x^2y^2 - 3x^2y - 4xy^2 - 0,5x^2y^2$.

3. Să se calculeze:

$z^4 \cdot z$; $y^9 \cdot y^2$; $x^5 \cdot x^4 \cdot x^3$; $(2x+1)^2 \cdot (2x+1) \cdot (2x+1)^4$.

4. Să se calculeze:

$x^a \cdot x^b \cdot x^c$; $y^{2m} \cdot y^n y^{3p}$; $x^a \cdot x^{2a} \cdot x^{6a}$ ($a, b, c, m, n, p \in \mathbb{N}$).

5. Să se calculeze:

$(x^2)^2$; $(x^3)^3$; $(z^5)^2$; $(z^2)^5$; $(x^2)^a$; $(y^3)^{2b}$; $(z^m)^n$ ($z, b, m, n \in \mathbb{N}$).

6. Să se calculeze:

a) $2x^2yz \cdot \frac{1}{4}xy^2z$; $-\frac{1}{3}xy^3 \cdot 1\frac{1}{2}x^3y$; $(-0,1x^ny^2) \cdot (-0,01x^3y^n)$ ($n \in \mathbb{N}$);

- * b) $1\frac{3}{7}r^2yz^3 \cdot (-0,7xz^2); (-2x^4y^2z^3)(-ytu); 2,5x^2y^5(-0,2y^3t);$
 c) $[-3(x^2 - y)^2(2x^3 + 3y)] \cdot [-0,5(x^2 - y)^3(2x^2 + 3y)^a] (a \in \mathbb{N}).$
- ✓ 7. Să se calculeze:
 a) $(-2x^2y)^2; (1,5x^3y^2z^2)^2; (-xy^2z^3)^3; (3x^2y^5)^4;$
 ✓ b) $\left(-\frac{1}{5}xy^2z^3\right)^2; \left(\frac{2}{3}x^3y^2z^4t\right)^3; \left(-\frac{1}{3}x^2y^4z\right)^5;$
 ✓ c) $(x^2y)^a; (2yz^3)^b; (3x^ay^b)^m; (-2z^n t^p)^{2a} \quad (a, b, m, n, p \in \mathbb{N}).$

3. POLINOM

Se numește polinom o sumă de monoame.
 Exemple de polinoame:

$$x^3; x + 2; 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5; \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + \frac{3}{4}z;$$

$$2x^2y - 5x^3 + 4y - 5; 2x + y.$$

Scriem:

$$P(x) = x^3; P(x) = x + 2; P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5;$$

$$P(x, y, z) = \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + \frac{3}{4}z \text{ etc.}$$

Valoarea numerică a unui polinom se află la fel ca pentru orice expresie algebrică.

Exemplu:

Fie polinomul $P(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} (x \in \mathbb{R})$. Să calculăm valoarea numerică a polinomului; pentru $x = -3; x = 0; x = 3; x = 6$.

Avem

$$P(-3) = -\frac{17}{6}, P(0) = -\frac{5}{6}, P(3) = \frac{7}{6}, P(6) = \frac{19}{6}.$$

Aceste valori se trec într-un tablou astfel:

x	-3	0	3	6
$P(x)$	$-\frac{17}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{19}{6}$

Forma redusă a unui polinom

Polinomul care se prezintă sub forma unei sume de monoame neasemenea două câte două spunem că este dat sub formă redusă.

Exemplu:

$$P(x) = -x^2 + 5 + 3x^3.$$

Gradul unui polinom

Prin gradul unui polinom dat sub formă redusă se înțelege cel mai mare dintre gradele monoamelor care compun polinomul.

Gradul unui polinom mai poate fi considerat relativ la una sau mai multe variabile. Când nu se specifică aceasta, prin *gradul unui polinom* se înțelege gradul relativ la mulțimea variabilelor.

Exemple:

1. Polinomul $2x^2 - 3x + x^3 - 5$ este de gradul trei (monoamele-termeni avînd respectiv gradele 2, 1, 3, 0).

2. Polinomul $2x^2y + 3x^2 - 5y + 2x^2 - 6$ este de *gradul trei* (gradele monoamelor-termeni fiind 3, 2, 1, 2, 0), este de *gradul doi* în raport cu variabila x (gradele termenilor fiind 2, 2, 0, 2, 0) și de *gradul întâi* în raport cu variabila y (gradele termenilor fiind 1, 0, 1, 0, 0).

Polinoame omogene

Un polinom dat sub formă redusă ai cărui termeni sînt toți de același grad se numește polinom omogen.

Orice monom se consideră polinom omogen.

Exemple:

1. Polinoamele:

a) $2x$; $-2\frac{1}{2}x$; b) $x + y$; $2x - 3y$; c) $x + y + z$; $2x - 3y + z$ sînt polinoame

omogene de gradul întâi, cu 1, 2, 3 variabile.

2. Polinoamele:

a) $-3x^2$; $4,5y^2$; b) $x^2 + 2y^2 - xy$; $4xy + y^2$; c) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2xz$ sînt polinoame omogene de gradul doi, cu 1, 2, 3 variabile.

3. Polinoamele:

a) $2,7y^3$; $-x^3$; mx^3 ; b) $x^2y + 2xy^2 - y^3$; c) xyz ; $x^3 + y^3 + z^3$ sînt polinoame omogene de gradul trei, cu 1, 2, 3 variabile.

4. Orice constantă a este considerată ca un polinom omogen de gradul zero.

Ordonarea termenilor unui polinom

Așa cum am văzut, orice polinom poate fi scris sub formă redusă. Polinomul fiind o sumă de mai mulți termeni-monoame, pe baza proprietății de comutativitate a sumei, putem scrie termenii polinomului în orice ordine dorim. A ordona termenii unui polinom înseamnă a scrie termenii lui într-o ordine, după anumite criterii.

În cele ce urmează, vom da câteva moduri de ordonare a termenilor unui polinom.

1) POLINOAME DE O SINGURĂ VARIABILĂ

În scrierea redusă a unui polinom de o singură variabilă, termenii pot fi aranjați, de exemplu, în ordinea descrescătoare a gradelor lor sau în ordinea crescătoare a acestor grade.

Exemplu:

Termenii polinomului de gradul 4 în x :

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x^4 + 2 - x$$

pot fi ordonați astfel:

$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 2$ (după puterile descrescătoare ale variabilei). Această formă se numește *forma canonică* a polinomului $P(x)$.

Altă ordonare:

$P(x) = 2 - x - x^2 + 2x^3 + 3x^4$ (după puterile crescătoare ale variabilei).

Polinomul $P(x) = 3x^6 + 2x^2 + 2x^7 - 5x^4$ poate fi scris astfel:

$P(x) = 2x^7 + 3x^6 - 5x^4 + 2x^2$. Se spune că este un *polinom incomplet*, deoarece lipsesc termenii de gradul 5, 3, 1, 0.

În general, un polinom de gradul n , de o singură variabilă, cu termeni ordonați după puterile descrescătoare ale variabilei, poate fi scris astfel:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n.$$

Numerele $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ ($a_0 \neq 0$) se numesc coeficienții polinomului.

2) POLINOAME DE MAI MULTE VARIABLE

În cazul polinoamelor de mai multe variabile, deoarece pot exista mai mulți termeni neasemenea de același grad, se folosesc mai multe criterii de ordonare.

a) *Ordonarea după puterile unei variabile date.* Pentru a ordona termenii unui polinom de mai multe variabile după puterile uneia dintre ele, trebuie să grupăm termenii lui în mai multe grupe, punând în aceeași grupă toți termenii de același grad în raport cu variabila stabilită și apoi scoțind factor comun din fiecare grupă puterea respectivă a necunoscutei.

Exemplu:

Se dă polinomul:

$$P(x, y, z) = 2x^3 - 3y^3 + 5z^3 + 3x^2y + xy^2 - xyz + 4xz^2 - 5x^2 - 2x^2z - 7$$

și se cere să se ordoneze termenii lui după puterile variabilei x .

Vom grupa termenii lui după puterea lor în raport cu x , începînd cu cea mai mare:

$$P(x, y, z) = 2x^3 + (3x^2y - 5x^2 - 2x^2z) + (xy^2 - xyz + 4xz^2) + (-3y^3 + 5z^3 - 7).$$

Scoatem factor comun pe x^2 și respectiv x din prima și a doua paranteză:

$$P(x, y, z) = 2x^3 + (3y - 2z - 5)x^2 + (y^2 - yz + 4z^2)x - (3y^3 - 5z^3 + 7)$$

și astfel am ordonat termenii polinomului după puterile variabilei x .

Ordonînd după puterile variabilei y , se scrie:

$$P(x, y, z) = -3y^3 + xy^2 + (3x^2 - zx)y + (2x^3 - 2x^2z - 5x^2 + 4xz^2 + 5z^3 - 7),$$

iar după puterile variabilei z :

$$P(x, y, z) = 5z^3 + 4xz^2 - (2x^2 + xy)z + (2x^3 + 3x^2y - 5x^2 - 3y^3 - 7).$$

b) *Ordonarea după polinoame omogene.* Orice polinom dat sub forma redusă poate fi scris ca o sumă de polinoame omogene. Pentru aceasta folosim proprietățile de comutativitate și asociativitate, stringînd termenii polinomului dat în grupe de termeni de același grad. Fiecare grupă de termeni este un polinom omogen, iar suma lor constituie polinomul dat.

Să ordonăm, spre exemplu, termenii polinomului:

$$P(x, y, z) = xyz + yz - 2y^2z - 5 + 3x^2 + 3x - 2y^2 + 2z^3 + x^3 + y$$

după polinoame omogene.

Vom grupa termenii de gradul trei, apoi pe cei de gradul doi ș.a.m.d.:

$$P(x, y, z) = (xyz - 2y^2z + 2z^3 + x^3) + (yz + 3x^2 - 2y^2) + (3x + y) - 5.$$

EXERCITII (2)

1. Să se scrie cîte un polinom de gradul 1, 2 și 3 în x .
2. Să se scrie cîte un polinom de gradul trei în x și y , care să fie:
 - a) de gradul întîi în x și de gradul doi în y ;
 - b) de gradul doi în x și de gradul trei în y ;
 - c) de gradul trei în x și de gradul întîi în y ;
 - d) de gradul doi atît în x cît și în y ;
 - e) de gradul trei atît în x cît și în y .
3. Să se scrie cîte un polinom de gradul doi în x, y, z , care să fie:
 - a) de gradul doi în raport cu fiecare dintre variabile;
 - b) de gradul doi în raport numai cu variabila x ;
 - c) de gradul doi în raport numai cu variabila y ;
 - d) de gradul doi în raport numai cu variabila z ;
 - e) de gradul întîi în raport cu fiecare dintre variabile.

6. Să se dea câte un exemplu de polinoame omogene:

a) de gradul întâi; b) de gradul doi; c) de gradul trei; d) de gradul patru.

6. Să se dea câte un exemplu de polinoame omogene:

a) de o singură variabilă; b) de două variabile; c) de trei variabile.

6. Să se dea câte un exemplu de polinoame omogene de gradul întâi cu două, trei și patru variabile.

7. Să se dea câte un exemplu de polinoame omogene de gradul doi cu două, trei și patru variabile.

8. Să se dea câte un exemplu de polinoame omogene de gradul trei cu două, trei și patru variabile.

9. Să se ordoneze, după puterile descrescătoare ale variabilei x , termenii polinomului:

$$P(x) = 2x^4 - x + x^6 - 5x^2 + 2 - 3x^5 + x^3.$$

10. Să se ordoneze, după puterile crescătoare ale variabilei x , termenii polinomului:

$$P(x) = 3x^4 - x^8 + 2x^2 + 3x^7 - 3x^3.$$

11. Să se ordoneze termenii polinomului:

$$P(x, y) = -4y^2 + 3x^4y + x^3y^2 - 2x^2y + y^3 - y - 3xy^3 - x^4 + 2x^2y - x^3 + y^5 + 2$$

după puterile variabilei y .

12. Să se ordoneze, după polinoame omogene, termenii polinomului:

$$P(x, y, z) = -3z^4 - x^2y^2 - 2xz^2 + x^5 + 2y - z - 3xz - 2x^4z + 3x^3y^2 + 2x^3y + y^3 + 3y^2.$$

13. Se dă polinomul:

$$P(x, y, z) = 3y^2z - 3x^2 + 3x - 3 - 2x^2y + 2xyz - 2xz + 2z + y^3 - xz^2 + z^2 - y$$

și se cere să se ordoneze termenii:

a) după puterile variabilei x ; b) după polinoame omogene.

OPERAȚII CU POLINOAME

1) Considerăm corpul R al numerelor reale și expresia algebrică:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1)$$

unde $a_0, a_1, \dots, a_n$ reprezintă elemente determinate din corpul R (coeficienți) și n un număr întreg ≥ 0 , iar x este o variabilă. Expresia (1) se numește *polinom de variabilă x cu coeficienți în corpul R* . Dacă $a_0 \neq 0$, polinomul este de gradul n .

Totalitatea polinoamelor de forma (1) (de variabilă x) cu coeficienți în corpul R formează o mulțime pe care o numim mulțimea polinoamelor de variabilă x cu coeficienți în corpul R .

Polinom nul. Polinomul identificat cu numărul real 0 se numește polinom nul.

2) ADUNAREA POLINOAMELOR

Fie polinoamele cu coeficienți în corpul R :

$$P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad (a_0 \neq 0);$$

$$Q(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2 \quad (b_0 \neq 0).$$

Asociem acestor polinoame un nou polinom numit *suma* acestor polinoame, în modul următor:

$$S(x) = P(x) + Q(x) = a_0x^3 + (a_1 + b_0)x^2 + (a_2 + b_1)x + (a_3 + b_2).$$

Se vede că pentru a face suma a două polinoame adunăm coeficienții acelorași puteri ale lui x .

Gradul sumei a două polinoame este egal cu cel mai mare dintre gradele celor două polinoame.

Exemplu:

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 4;$$

$$Q(x) = -2x^3 + 5x^2 - 4x + 2.$$

Avem:

$$S(x) = P(x) + Q(x) = (3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 4) + (-2x^3 + 5x^2 - 4x + 2).$$

Suprimăm parantezele și scriem termenii cu semnele lor, deoarece au în față semnul plus:

$$S(x) = P(x) + Q(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 2.$$

Reducem termenii asemenea și avem:

$$\begin{aligned} S(x) = P(x) + Q(x) &= 3x^4 + (2 - 2)x^3 + (-3 + 5)x^2 + (-5 - 4)x + (-4 + 2) = \\ &= 3x^4 + 2x^2 - 9x - 2. \end{aligned}$$

Polinoame opuse. Două polinoame se numesc opuse dacă suma lor este polinomul nul.

Opusul unui polinom oarecare $P(x)$ este un polinom notat cu $-P(x)$ și format cu opușii termenilor polinomului $P(x)$.

Astfel, opusul polinomului $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ este polinomul $-P(x) = -5x^2 + 3x - 4$.

Verificare:

$$\begin{aligned} P(x) + [-P(x)] &= 5x^2 - 3x + 4 - 5x^2 + 3x - 4 = 0x^2 + 0x + \\ &+ 0 = 0. \end{aligned}$$

Deci:

$$P(x) + [-P(x)] = [-P(x)] + P(x) = P(x) - P(x) = 0.$$

3) ÎNMULȚIREA POLINOAMELOR

Fie polinoamele cu coeficienți în corpul R :

$$P(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 \quad (a_0 \neq 0);$$

$$Q(x) = b_0x + b_1 \quad (b_0 \neq 0).$$

Produsul acestor polinoame va fi polinomul:

$$P(x) \cdot Q(x) = a_0b_0x^3 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^2 + (a_1b_1 + a_2b_0)x + a_2b_1.$$

Înmulțirea considerată pe mulțimea polinoamelor de variabilă x cu coeficienți în corpul R păstrează regulile de calcul algebric ale produsului stabilite în mulțimea R , adică:

- înmulțirea unei sume cu un număr dat sau cu o altă sumă;
- regula semnelor la înmulțire etc.

Observații. 1. Gradul polinomului produs este egal cu suma gradelor polinoamelor factori.

2. Produsul dintre un polinom și un număr real îl considerăm ca un produs de două polinoame, deoarece elementele din R le considerăm polinoame de gradul zero.

De exemplu: fie $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ și $b \in R$.
Avem:

$$b \cdot P(x) = b(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3) = ba_0x^3 + ba_1x^2 + ba_2x + ba_3$$

Dacă $b = 1$, unde 1 este elementul unitate din R , avem:

$$1 \cdot P(x) = P(x),$$

deci polinomul identificat cu numărul real 1 este element neutru (sau element unitate) la înmulțire în mulțimea polinoamelor de variabilă x asupra corpului R .

Dacă $b = 0$, unde 0 este elementul nul din R , avem:

$$0 \cdot P(x) = 0,$$

deci dacă într-un produs de polinoame un factor este polinomul identificat cu numărul real 0, atunci produsul este polinomul identificat cu numărul real 0.

4) INELUL POLINOAMELOR

Să cercetăm, prin analogie cu proprietățile subliniate la mulțimile de numere, care anume proprietăți ale operațiilor de adunare și înmulțire se mențin și la polinoame.

Proprietăți ale adunării

A_1 . Adunarea este asociativă, adică oricare ar fi polinoamele $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, avem egalitatea:

$$[P_1(x) + P_2(x)] + P_3(x) = P_1(x) + [P_2(x) + P_3(x)].$$

De exemplu, dându-se polinoamele:

$$P_1(x) = 2x^2 + 8x - 1; \quad P_2(x) = x^3 + 2x^2 - 5; \quad P_3(x) = 4x + 5,$$

avem:

$$\begin{aligned} [P_1(x) + P_2(x)] + P_3(x) &= (2x^2 + 8x - 1) + (x^3 + 2x^2 - 5) + (4x + 5) = \\ &= (2x^2 + 8x - 1 + x^3 + 2x^2 - 5) + (4x + 5) = x^3 + 2x^2 + 10x - 6 + \\ &\quad + 4x + 5 = x^3 + 2x^2 + 14x - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(x) + [P_2(x) + P_3(x)] &= (2x^2 + 8x - 1) + [(x^3 + 2x^2 - 5) + \\ &+ (4x + 5)]. \text{ Se verifică egalitatea } P_1(x) + [P_2(x) + P_3(x)] = 2x^2 + \\ &+ 8x - 1 + x^3 + 2x^2 - 5 + 4x + 5 = x^3 + 2x^2 + 14x - 1. \end{aligned}$$

Scriem:

$$P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) = 2x^2 + 8x - 1 + x^3 + 2x^2 - 5 + 4x + 5.$$

A_2 . Adunarea este comutativă, adică, oricare ar fi polinoamele $P_1(x)$, $P_2(x)$, avem egalitatea:

$$P_1(x) + P_2(x) = P_2(x) + P_1(x).$$

De exemplu, dându-se polinoamele:

$$P_1(x) = 2x^2 - 3; \quad P_2(x) = 3x + 4,$$

avem:

$$\begin{aligned} P_1(x) + P_2(x) &= (2x^2 - 3) + (3x + 4) = 2x^2 - 3 + 3x + 4 = 2x^2 + 3x + 1; \\ P_2(x) + P_1(x) &= (3x + 4) + (2x^2 - 3) = 3x + 4 + 2x^2 - 3 = 2x^2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

Se verifică că $P_1(x) + P_2(x) = P_2(x) + P_1(x)$.

A_3 . În mulțimea polinoamelor de variabilă x există un polinom, polinomul identificat cu numărul 0, cu proprietatea că, oricare ar fi polinomul $P(x)$, avem egalitatea:

$$P(x) + 0 = 0 + P(x) = P(x).$$

Într-adevăr, dându-se polinoamele:

$$P(x) = 5x^3 - 2x + 3,$$

avem:

$$P(x) + 0 = (5x^3 - 2x + 3) + 0 = 5x^3 - 2x + 3;$$

$$0 + P(x) = 0 + (5x^3 - 2x + 3) = 5x^3 - 2x + 3.$$

Polinomul nul este elementul neutru pentru adunarea polinoamelor.

A_4 . Pentru orice polinom $P(x)$ există un polinom notat $-P(x)$, cu proprietatea:

$$P(x) + [-P(x)] = [-P(x)] + P(x) = 0.$$

În loc de $P(x) + [-P(x)]$ se mai scrie: $P(x) - P(x)$. Aceasta arată că în mulțimea polinoamelor de variabilă x avînd coeficienți în corpul R , diferența a două polinoame este tot un polinom; a scădea un polinom $P(x)$ din polinomul $Q(x)$ înseamnă a aduna polinomul $Q(x)$ cu opusul polinomului $P(x)$.

Proprietăți ale înmulțirii

M_1 . *Înmulțirea este asociativă*, adică, oricare ar fi polinoamele $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, avem egalitatea:

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot P_3(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot P_3(x).$$

De exemplu, dîndu-se polinoamele:

$$P_1(x) = (2x + 3); \quad P_2(x) = x^3 + 1; \quad P_3(x) = 2x^2 + x,$$

avem:

$$\begin{aligned} [P_1(x) \cdot P_2(x)] \cdot P_3(x) &= [(2x + 3)(x^3 + 1)] \cdot (2x^2 + x) = (2x^5 + 2x + 3x^3 + 3) \cdot (2x^2 + x) \\ &= 4x^7 + 2x^6 + 4x^3 + 2x^2 + 6x^5 + 3x^4 + 6x^2 + 3x; \\ P_1(x) \cdot [P_2(x) \cdot P_3(x)] &= (2x + 3)(x^3 + 1)(2x^2 + x) = (2x + 3)(2x^5 + x^4 + 2x^2 + x) \\ &= 4x^7 + 2x^6 + 4x^3 + 2x^2 + 6x^5 + 3x^4 + 6x^2 + 3x. \end{aligned}$$

M_2 . *Înmulțirea este comutativă*, adică, oricare ar fi polinoamele $P_1(x)$, $P_2(x)$, avem egalitatea:

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = P_2(x) \cdot P_1(x).$$

De exemplu, dîndu-se polinoamele:

$$P_1(x) = (x + 3); \quad P_2(x) = 2x^3 - x,$$

avem:

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = (x + 3)(2x^3 - x) = 2x^4 - x^2 + 6x^3 - 3x;$$

$$P_2(x) \cdot P_1(x) = (2x^3 - x)(x + 3) = 2x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x.$$

M_3 . *În mulțimea polinoamelor de variabilă x există un polinom, polinomul identificat cu numărul real 1, cu proprietatea că, oricare ar fi polinomul $P(x)$, avem:*

$$1 \cdot P(x) = P(x) \cdot 1 = P(x).$$

Polinomul identificat cu numărul real 1 este *elementul neutru* pentru înmulțirea polinoamelor sau *elementul unitate*.

Proprietatea M_4 a înmulțirii, pentru orice polinom $P(x)$ de un grad > 0 , există un polinom notat cu $\frac{1}{P(x)}$ cu proprietatea că $P(x) \cdot \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{P(x)} \cdot P(x) = 1$, nu mai are loc înmulțimea polinoamelor de variabilă x cu coeficienți în corpul R .

Într-adevăr, un polinom $P(x)$ de grad > 0 nu admite un invers, căci nu putem determina un alt polinom $P_1(x)$, astfel ca să avem: $P(x) \cdot P_1(x) = 1$, deoarece gradul lui $P(x) \cdot P_1(x)$ este mai mare ca zero și deci produsul $P(x) \cdot P_1(x)$ nu poate fi egal cu o constantă.

Proprietăți de legătură între adunare și înmulțire

Înmulțirea este distributivă la stînga și la dreapta față de adunare, adică, oricare ar fi polinoamele $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, avem egalitățile:

$$P_1(x) \cdot [P_2(x) + P_3(x)] = P_1(x) \cdot P_2(x) + P_1(x) \cdot P_3(x);$$

$$[P_2(x) + P_3(x)] \cdot P_1(x) = P_2(x) \cdot P_1(x) + P_3(x) \cdot P_1(x).$$

De exemplu, dîndu-se polinoamele:

$$P_1(x) = 2x + 3; P_2(x) = x^3 + 1; P_3(x) = 2x^2 + x,$$

avem:

$$\begin{aligned} P_1(x) \cdot [P_2(x) + P_3(x)] &= (2x + 3) [(x^3 + 1) + (2x^2 + x)] = (2x + 3) (x^3 + \\ &+ 1 + 2x^2 + x) = 2x^5 + 2x + 4x^3 + 2x^2 + 3x^3 + 3 + 6x^2 + 3x = \\ &= 2x^5 + 7x^3 + 8x^2 + 5x + 3 = P_1(x) \cdot P_2(x) + P_1(x) \cdot P_3(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [P_2(x) + P_3(x)] \cdot P_1(x) &= [(x^3 + 1) + (2x^2 + x)] (2x + 3) = (x^3 + 1 + 2x^2 + \\ &+ x) (2x + 3) = 2x^5 + 3x^3 + 2x + 3 + 4x^3 + 6x^2 + 2x^2 + 3x = 2x^5 + \\ &+ 7x^3 + 8x^2 + 5x + 3 = P_2(x) \cdot P_1(x) + P_3(x) \cdot P_1(x). \end{aligned}$$

Prin urmare, operațiile de adunare și înmulțire definite în mulțimea polinoamelor de variabilă x cu coeficienți în corpul R au proprietățile A_1, A_2, A_3, A_4 și M_1, M_2, A, M și deci determină pe această mulțime o structură de inel.

Așadar, mulțimea polinoamelor de o variabilă x formează inel, inelul polinoamelor. Acest inel este un inel comutativ cu element unitate. Polinoamele de o variabilă x pot fi considerate cu coeficienții și în alte mulțimi numerice ca, de exemplu, în inelul întregilor (Z) sau în corpul numerelor raționale (Q).

Se constată ușor că cele două operații definite adunarea și înmulțirea determină o structură de inel, pe mulțimea polinoamelor de o variabilă x cu coeficienți în inelul întregilor sau în corpul Q .

Notă. Pentru ușurința înțelegerii s-au subliniat regulile de calcul cu polinoame folosind polinoame de o variabilă cu coeficienți în R .

În continuare vor fi aplicate aceste reguli și în cazul unor polinoame de mai multe variabile.

Exemple:

1. Să se efectueze:

$$\left(2\frac{1}{2}x^2 - 3,4y + \frac{1}{2}xz^3 - 3\right) - (3x^2 + 1,4xz^3 - 1) - (3,7y - 2xz^3 + 4) + \\ + \left(4x^2 - 3\frac{1}{5}y + 4\frac{1}{2}xz^3\right) - (2x^2 - 3y + 4).$$

Rezolvare:

$$\left(2\frac{1}{2}x^2 - 3,4y + \frac{1}{2}xz^3 - 3\right) + (-3x^2 - 1,4xz^3 + 1) + (-3,7y + 2xz^3 - 4) + \\ + \left(4x^2 - 3\frac{1}{5}y + 4\frac{1}{2}xz^3\right) + (-2x^2 + 3y - 4) = 2\frac{1}{2}x^2 - 3,4y + \frac{1}{2}xz^3 - 3 - \\ - 3x^2 - 1,4xz^3 + 1 - 3,7y + 2xz^3 - 4 + 4x^2 - 3\frac{1}{5}y + 4\frac{1}{2}xz^3 - 2x^2 + 3y - 4 = \\ = 1,5x^2 - 7,3y + 5,6xz^3 - 10.$$

Notă. Pentru a se obține mai repede rezultatul, înlocuirea polinoamelor cu semnul — în față prin opusele lor și înlăturarea parantezelor se fac de obicei în același timp.

2. Să se efectueze:

$$(2x^2 - 3xy + y^2) - (3y^2 + 2yz - 2z^2) - (x^2 - 4xz + z^2).$$

Rezolvare:

$$2x^2 - 3xy + y^2 - 3y^2 - 2yz + 2z^2 - x^2 + 4xz - z^2 = x^2 - 2y^2 + z^2 - 3xy - 2yz + 4xz.$$

Observație. În general, suma a două sau mai multe polinoame omogene de același grad este tot un polinom omogen de același grad cu polinoamele date.

3. Să se efectueze:

$$2x^2y - 3xy^2 - xy^2 + (x^2y - 2xy^2) - 3x^2y - (2xy^2 - x^2y) - (2x^2y - 3xy^2).$$

Rezolvare:

$$2x^2y - 3xy^2 - xy^2 + x^2y - 2xy^2 - 3x^2y - 2xy^2 + x^2y - 2x^2y + 3xy^2 = -x^2y - \\ - 5xy^2 = -xy(x + 5y).$$

Exerciții cu înmulțiri de polinoame

Când avem de înmulțit două polinoame, se înmulțește fiecare termen al unui polinom, pe rând, cu toți termenii celuilalt și apoi se reduc termenii asemenea.

Exemple:

1. Să se efectueze:

$$(x^3 - 2x^2 - 3x + 4)(-2x^3 + 3x + 1).$$

Rezolvare:

Avem:

$$\begin{aligned} -2x^5 + 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 3x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 12x + x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = \\ = -2x^5 + 7x^4 + x^3 - 19x^2 + 9x + 4. \end{aligned}$$

2. Să se efectueze:

$$(2x + 1)(3x - 2)(x - 5)(x + 1).$$

Rezolvare:

Înmulțim primele două binoame între ele, rezultatul cu al treilea ș.a.m.d. Avem:

$$\begin{aligned} (2x + 1)(3x - 2)(x - 5)(x + 1) &= (6x^2 - x - 2)(x - 5)(x + 1) = \\ &= (6x^3 - 31x^2 + 3x + 10)(x + 1) = 6x^4 - 25x^3 - 28x^2 + 13x + 10. \end{aligned}$$

EXERCITII (3)

Să se efectueze:

1. a) $5x(6x + 3y)$; b) $(2x^2 - 6x + 4) \cdot (-8x)$; c) $2ab(2a^2 - 5ab + b^2)$.

2. a) $-2xy \left(-1\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}xy + y^2 \right)$; b) $-4ax(13ax + 2y^2 - \frac{1}{4}ay + x^2)$;

c) $(-2a^3x + 5a^2x^2 - 5ax^3 + 3x^4) \cdot (-3ax^2)$.

3. a) $(1 - 0,3a + 0,15a^2) \cdot 4a$; b) $(a^m + 2a^2) \cdot a^n$;

c) $8y^{a-1} \left(\frac{1}{2}y^{a+1} - \frac{3}{4}y \right) (a \in \mathbb{N})$.

Să se înmulțească polinoamele:

4. a) $(5ab^2 + 4b^3)(3ab^3 - 4a^2)$; b) $\left(-\frac{1}{2}x^2yz + 0,2xy^2 \right) (1,25z - 0,75z^2)$;

c) $(5ab^2 - 3a^3 + 2a^2b)(-ab + 2a^2 - 4b^2)$

5. a) $(2x^2 - 6x - 3)(4x^2 - 5x + 2)$; b) $(2 + 4x - 6x^2 + 8x^3)(1 - 3x - 5x^2 - 3x^3)$; c) $(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y)$.

6. a) $(a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4)(a - x)$; b) $(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)(x + a)$; c) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

7. a) $(3x^5 + x^3 + 2x + 3 - 4x^4 - 2x^3)(x - x^3 - 3x^2 + 2)$;

b) $(x^2 + 2x - x^4 - x^5 + x^3 + 1)(2x - x^4 + 3x^2 - x^3 + 1)$;

c) $(x^3 + 2x^2 - 1 + x^4)(3x + x^3 - 2 - 2x^2)$.

8. a) $(3x^2 + 5y^2 - 2xy)(2x - 3y)$; b) $(x^3 - y^3 + 2x^2y + 3xy^2)(3xy - 2x^2 - y^2)$; c) $(2xy^3 + 3x^4 + y^4 - 5x^2y^2)(2xy + x^2)$.

Să se efectueze:

9. a) $(2x - y)(3x + 2y)(4x - 3y)$; b) $(3x^2 + 1)(2x^2 - 1)(x^3 + 2)$;

c) $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)(a^4 - a^2 + 1)$; d) $(x^3 + 2xy + y^2)(x^3 - 2xy + y^2)(x^2 + y^2)$.

10. a) $(x+1)(2x+1)(x+2)(3x+1)(3x-2)(x-3)$; b) $(-x+1)(x^2+1) \times (x^3+1)(x^4-1)$.

Să se efectueze:

11. a) $(2x+1)(3x^2-4x+5) - (3x-1)(3x^2+x-2) + (x-3)(3x^2+14x+1)$;
 b) $(2x+3y)(x^2-2xy+3y^2) - (-2x^2-5xy+y^2)(3x-4y) - (4x+y) \times (2x^2+xy-6y^2)$; c) $(2a-b+3c)(3a+b-2c) - (5a-2b-2c)(2a+3b+5c) - (a+b-c)(-4a+3b+c)$.

Să se arate că:

12. a) $3x(2x^2-x+1) - \{(3x+2)(-x^2+2x-3) - 5[(x^2-2x+3)(2x-5) - 2(x-3)(x^2-2x+5)]\} = (3x+1)(x-1)(3x+2) - (2x-7)(x+11) + 6$;
 b) $x^4 - \{(x^2-x+2)(x-2)(x+1) - 2[(2x+1)(x-1)(x+2)(3x+1) - (2x^2+4x+5)(3x^2-x+1)]\} = (2x+1)(2x+3)(x-11) - (2x+5) \times (x-35) - 2(x+76) - x(x-6)$.

5) ÎMPĂRȚIREA POLINOAMELOR

Se știe că oricare ar fi numerele naturale d și i (admitem că d poate fi și 0) există un singur număr natural q (admitem că acesta poate fi și 0) și un singur număr natural r (admitem că acesta poate fi și 0), cu proprietățile:

a) $d = i \cdot q + r$;

b) $r < i$.

Numărul dat d se numește *deîmpărțit*, iar numărul dat i se numește *împărțitor*. Numărul q se numește *cît* iar numărul r se numește *rest*. Cînd aflăm cîtul și restul se spune că efectuăm împărțirea lui d la i .

Dacă $r = 0$ se spune că numărul d se împarte exact (sau fără rest) la numărul i . În acest caz se mai spune că d este un *multiplu* al lui i , sau că i este un *divizor* al lui d .

Exemple:

1. Fie numerele $d = 17$ și $i = 5$. Există două numere q și r , și anume $q = 3$ și $r = 2$, astfel încît

a) $\underbrace{17}_d = \underbrace{5}_i \cdot \underbrace{3}_q + \underbrace{2}_r$;

b) $\underbrace{2}_r < \underbrace{5}_i$.

2. Fie numerele $d = 20$ și $i = 4$. Există două numere q și r , și anume $q = 5$ și $r = 0$, astfel încît

a) $\underbrace{20}_d = \underbrace{4}_i \cdot \underbrace{5}_q + \underbrace{0}_r$;

b) $\underbrace{0}_r < \underbrace{4}_i$.

În acest caz împărțirea se face exact.

3. Fie numerele $d = 7$ și $i = 13$. Există două numere q și r , și anume $q = 0$ și $r = 7$, astfel încât

$$a) \underbrace{7}_d = \underbrace{13}_i \cdot \underbrace{0}_q + \underbrace{7}_r;$$

$$b) \underbrace{7}_r < \underbrace{13}_i.$$

În cazul polinoamelor cu coeficienți în corpul numerelor reale R (sau în corpul numerelor raționale Q) există o proprietate analogă cu proprietatea subliniată mai înainte. Vom enunța această proprietate în cazul polinoamelor de o variabilă. Pentru simplificarea scrierii, în loc de „gradul polinomului $P(x)$ ” vom scrie $\text{gr } P(x)$.

Dacă se dau două polinoame $D(x)$ și $I(x)$ cu coeficienți în corpul R (respectiv Q) există două polinoame $Q(x)$ și $R(x)$ cu coeficienți în corpul R (respectiv Q) astfel încât:

$$a) D(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x);$$

$$b) \text{gr } R(x) < \text{gr } I(x).$$

$D(x)$ se numește polinom deîmpărțit, $I(x)$ se numește polinom împărțitor, polinomul $Q(x)$ se numește cit, polinomul $R(x)$ se numește rest.

Dacă polinomul $R(x)$ este numărul real (rațional) 0 se spune că împărțirea se face exact. În acest caz se spune că polinomul $D(x)$ se divide la $I(x)$.

Când aflăm citul și restul se spune că împărțim polinomul $D(x)$ la polinomul $I(x)$.

Modul cum se află citul va reieși din următoarele exemple.

Exemple :

Pentru a împărți două polinoame de aceeași variabilă, le ordonăm mai întâi după puterile descrescătoare ale variabilei și apoi procedăm astfel: împărțim primul termen al deîmpărțitului la primul termen al împărțitorului și obținem primul termen al citului; efectuăm produsul dintre împărțitor și primul termen al citului și scădem apoi produsul obținut din deîmpărțit. Restul găsit îl considerăm ca un nou deîmpărțit, pe care îl împărțim în continuare la polinomul împărțitor. Continuăm astfel împărțirea până obținem toți termenii citului.

1.

$D(x)$	$I(x)$
$3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$	$x^2 - 2x + 3$
$-3x^4 + 6x^3 - 9x^2$	$3x^2 + 11x + 11$
$11x^3 - 11x^2 + 3x$	$Q(x)$
$-11x^3 + 22x^2 - 33x$	
$11x^2 - 30x + 1$	
$-11x^2 + 22x - 33$	
$-8x - 32$	
$R(x)$	

Verificare

a) Să arătăm că $D(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$, adică

$$\frac{3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{D(x)} = \frac{(x^2 - 2x + 3)}{I(x)} \frac{(3x^2 + 11x + 11)}{Q(x)} + \frac{(-8x - 32)}{R(x)};$$

avem:

$$(x^2 - 2x + 3)(3x^2 + 11x + 11) + (-8x - 32) = 3x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 6x^3 - 22x^2 - 22x + 9x^2 + 33x + 33 - 8x - 32 = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1.$$

Verificarea făcută se numește proba împărțirii.

b) Avem $\text{gr } R(x) = \text{gr}(-8x - 32) = 1$;

$$\text{gr } I(x) = \text{gr}(x^2 - 2x + 3) = 2;$$

$$\text{gr } R(x) < \text{gr } I(x) \quad (1 < 2).$$

2. Să se efectueze împărțirea polinomului

$$(2x^7 - 5x^5 - 4x^4 - 2x^2 - 9x - 6) \text{ la polinomul } (2x^4 + x^2 + 3)$$

$D(x)$	$I(x)$
$\begin{array}{r} 2x^7 - 5x^5 - 4x^4 \qquad - 2x^2 - 9x - 6 \\ - 2x^7 - \quad x^5 \qquad - 3x^3 \\ \hline - 6x^5 - 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 9x - 6 \\ 6x^5 \qquad + 3x^3 \qquad + 9x \\ \hline - 4x^4 \qquad - 2x^2 \qquad - 6 \\ 4x^4 \qquad + 2x^2 \qquad + 6 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2x^4 + x^2 + 3 \\ x^3 - 3x - 2 \\ \hline \end{array}$
$R(x)$	

Verificare

a) $(2x^7 - 5x^5 - 4x^4 - 2x^2 - 9x - 6) = (2x^4 + x^2 + 3)(x^3 - 3x - 2) + 0$;

b) $\text{gr } R(x) < \text{gr } I(x)$ (căci $\text{gr } R(x) = \text{gr } 0 = 0$ și $\text{gr } I(x) = 4$).

Această împărțire se face exact.

3. Să se efectueze împărțirea polinomului

$$(x^6 - 2x^5y - 2x^4y^2 + 2x^3y^3 - 2x^2y^4 - 2xy^5 + y^6) \text{ la polinomul } (x^3 + y^3).$$

Termenii polinoamelor fiind deja ordonați după puterile lui x , putem efectua împărțirea:

$\begin{array}{r} x^6 - 2x^5y - 2x^4y^2 + 2x^3y^3 - 2x^2y^4 - 2xy^5 + y^6 \\ - x^6 \\ \hline - 2x^5y - 2x^4y^2 + 2x^3y^3 - 2x^2y^4 - 2xy^5 + y^6 \\ 2x^5y \qquad + 2x^2y^4 \\ \hline - 2x^4y^2 + 2x^3y^3 \qquad - 2xy^5 + y^6 \\ 2x^4y^2 \qquad + 2xy^5 \\ \hline 2x^3y^3 \qquad + y^6 \\ - 2x^3y^3 \qquad - y^6 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^3 + y^3 \\ x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + y^3 \\ \hline \end{array}$
---	---

4. Să se efectueze împărțirea polinomului

$(3x^5 - 14x^4 - 16x^3 + 15x^2 + 10x + 9)$ la polinomul $(x^3 - 4x^2 - 7x + 1)$

$$\begin{array}{r|l}
 3x^5 - 14x^4 - 16x^3 + 15x^2 + 10x + 9 & x^3 - 4x^2 - 7x + 1 \\
 - 3x^5 + 12x^4 + 21x^3 - 3x^2 & \\
 \hline
 - 2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 10x + 9 & \\
 2x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 2x & \\
 \hline
 - 3x^3 - 2x^2 + 12x + 9 & \\
 3x^3 - 12x^2 - 21x + 3 & \\
 \hline
 - 14x^2 - 9x + 12 &
 \end{array}$$

Observație. Din exemplele de mai sus se observă că:

Gradul cîtului a două polinoame este egal cu diferența dintre gradul polinomului de împărțit și gradul polinomului împărțitor.

Observație importantă. Regulile de calcul cu polinoame se bazează pe proprietăți ale numerelor reale, adevărate oricare ar fi numerele reale considerate. De exemplu, egalitatea $x(y + z) = xy + xz$, prin care se exprimă distributivitatea înmulțirii față de adunare (proprietate pe care se bazează multe reguli de calcule) este adevărată oricare ar fi numerele reale x, y și z . Rezultă că egalitățile prin care se exprimă rezultatul operațiilor efectuate cu polinoame sînt adevărate oricare ar fi numerele reale care intervin.

Exemplu:

Avem $(x + 2)(x^2 + 3x - 5) = x^3 + 3x^2 - 5x + 2x^2 + 6x - 10$ sau $(x + 2)(x^2 + 3x - 5) = x^3 + 5x^2 + x - 10$. Această egalitate este adevărată oricare ar fi numărul real x .

Verificare

Pentru $x = 1$, obținem

$$(1 + 2)(1 + 3 - 5) = 1 + 5 + 1 - 10.$$

sau

$$3 \cdot (-1) = -3,$$

egalitate care este adevărată.

În particular egalitatea $D(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$ obținută cînd se împarte polinomul $D(x)$ la polinomul $I(x)$ este adevărată, oricare ar fi numărul real x .

Împărțirea cu $x - a$

Am văzut că la împărțirea cu rest, gradul restului este mai mic decît gradul împărțitorului (cel puțin cu o unitate), iar proba se face pe baza identității $D = I \cdot C + R$.

Să cercetăm cazul particular, foarte util în aplicații, de împărțire a unui polinom $P(x)$ prin binomul $x - a$.

Evident că în cazul împărțirii prin binomul $x-a$, de gradul întâi, restul $R(x)$ este de grad zero, deci o constantă. Deoarece $R(x)$ nu conține pe x vom scrie în loc de $R(x)$ litera R .

O metodă simplă pentru a stabili restul împărțirii unui polinom $P(x)$ la binomul $x-a$, fără a efectua împărțirea, este dată de următoarea

T e o r e m ă. Restul împărțirii unui polinom $P(x)$ prin $x-a$ este egal cu valoarea numerică a polinomului pentru $x=a$, adică

$$R = P(a)$$

Demonstrație

Fie $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ și binomul $x-a$.
($D(x) = P(x)$ iar $I(x) = x-a$)

Avem:

$$P(a) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + \dots + a_{n-1}a + a_n.$$

Să arătăm că:

$$R = P(a) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + \dots + a_{n-1}a + a_n.$$

Relația $D(x) = I(x) \cdot Q(x) + R$ devine:

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R \quad (R = \text{constantă}).$$

Egalitatea este adevărată oricare ar fi numărul real x și deci, în particular, când $x = a$. În acest caz, avem:

$$P(a) = (a-a) \cdot Q(a) + R, \text{ cum } a-a = 0$$

obținem:

$$\boxed{P(a) = R},$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Consecință. Dacă $P(x)$ se divide la $(x-a)$ atunci $R=0$, adică $P(a)=0$.

Exemple:

Pentru a găsi restul împărțirii polinomului

$$P(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 + 3x - 2 \quad \text{prin } x-2$$

înlocuim în polinom x cu 2 și avem:

$$R = P(2) = 2 \cdot 2^4 - 2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 32 - 8 - 4 + 6 - 2 = 24$$

La fel pentru:

$$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 2 \quad \text{prin } x - \frac{1}{2}, \text{ avem:}$$

$$R = P\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \frac{1}{2^3} - 2 \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Consecință. Deoarece $x + a$ se poate scrie $x - (-a)$, putem aplica teorema și în cazul împărțirii unui polinom $P(x)$ prin binomul $x + a$ și avem:

$$R = P(-a)$$

Exemplu:

Împărțind polinomul $3x^3 - 2x^2 + x - 5$ la polinomul $(x + 2)$ obținem restul:
 $R = P(-2) = 3 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = -24 - 8 - 2 - 5 = -39$.

EXERCITII (4)

1. Să se efectueze împărțirile de puteri:

$$x^5 : x^3; a^6 : a^5; y^6 : y^6; x^{m+2} : x^{m-1}; y^{2m+3} : y^m; y^{3m+3} : y^{2m-1} (m, n \in \mathbb{N}).$$

2. Să se efectueze:

$$\text{a) } 18x^3y^2 : 7x^2y; -21ab^3c^5 : 18b^2c^2; 25x^3yz^4 : (-16x^2yz); -\frac{2}{5} a^4x^3y^2 : \left(-\frac{1}{2} a^3xy^2\right);$$

$$-\frac{3}{4} a^5b^3c : 1 \frac{1}{2} a^2b^2c.$$

$$\text{b) } 0,5a^mb^mc^3 : \left(-\frac{2}{3} a^2bc\right); 1,5x^{m+1} y^{n-1} : 3x^{m-1} y^{n-2} (m, n \in \mathbb{N}); -\frac{3}{5} x^{2m+1} y^{m-1} :$$

$$:\left(-1 \frac{2}{3} x^{m+3} y^{m-3}\right); -\frac{2}{7} x^3y^{2m} : 1 \frac{1}{3} x^{2m} y^m (m \in \mathbb{N}).$$

3. Să se efectueze:

$$\text{a) } 42(x-1)^8 : [-14(x-1)^5];$$

$$0,75(2x^2 - 3y^3)^5 : \left[-1 \frac{1}{3} (2x^2 - 3y^3)^5\right].$$

$$\text{b) } -36(ax^2 - y)^{m+1} : 12(ax^2 - y)^3;$$

$$8(a+b+c^2)^{2m+1} : 5(a+b+c^2)^{m-1}; m \in \mathbb{N}.$$

$$\text{c) } 25(x+a)^5 (y+b)^7 : [-6(x+a)^3 (y+b)^6];$$

$$14(x+y^2-z^3)^n (x-y^3+z^2)^{2n} : [35(x-y^3+z^2)^{n-1} (x+y^2-z^3)^{n-1}], n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{d) } (12x^4y^2 - 15x^5y^3 - 16x^3y^4 + 13x^6y^5) : (-6x^3y^2);$$

$$(-4a^5b^2 - \frac{4}{9} a^4b^5 + \frac{2}{3} a^3b^6) : \frac{2}{3} a^3b^3.$$

$$\text{e) } (-0,05y^5 - 0,08y^4 + 0,09y^3 - 0,01y^2) : (-0,01y^3);$$

$$[6(2x-1)^5 - 9(2x-1)^4 - 12(2x-1)^3 - 18(2x-1)^2] : [-3(2x-1)^2].$$

4. Să se efectueze:

$$\text{a) } (15a^2 - 2a - 1) : (5a + 1); (6z^2 - 10z - 24) : (3z + 4);$$

$$(9x^2 + 3xy - 2y^2) : (1,5x + y); (6x^2 - 25xy + 4y^2) : (3x - 0,5y).$$

- b) $(4x^3 + 4x^2 - 29x + 21) : (2x - 3); (a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16) : (a + 2);$
 $(x^4 - 5x^3 + 7x + 10) : (2 - x).$
 c) $(6x^2 - 2xy^2 - 28y^4) : (2x + 4y^2);$
 $(6x^3y^3 + 9x^4y^3 - 10x^2y^5 - 15x^3y^5) : (3x^2y - 5xy^3).$

5. Să se efectueze:

- a) $(4x^6 - 8x^4 + 39x^2 - 30x - 35) : (2x^2 + 6x + 7); (x^8 - 12x^5 - 30x^2 + 5) :$
 $: (x^2 - 2x - 1); (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) : (x + y + z).$
 b) $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1); (x^6 + x^4 + 1) : (x^2 + x + 1);$
 $(x^{10} - x^5 + 1) : (x^2 - x + 1).$

6. Fără a efectua împărțirea să se scrie citul, folosind formulele de calcul prescurtat:

- a) $(4y^2 - 25) : (2y - 5); (x^4y^2 - 144) : (x^2y - 12); (x^{2m} - 1) : (x^m + 1).$
 b) $(x^2 - 6x + 9) : (x - 3); (x^4 - 4x^2y + 4y^2) : (x^2 - 2y);$
 $(x^3 - 6y^2 + 12y - 8) : (y - 2).$
 c) $(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) : (x^2 - 6x + 9); (8x^3 + 12x^2 + 9x + 1) : (4x^2 + 4x + 1);$
 $(x^3 - 27a^3) : (x^2 + 3ax + 9a^2); (125x^6 + 64y^3) : (25x^4 - 20x^2y + 16y^2).$
 d) $(x^9 + 1) : (x + 1); (x^9 - 1) : (x - 1); (x^8 - 1) : (x - 1);$
 $(32x^{10} + 243y^5) : (2x^2 + 3y); (x^8y^{12} - 256y^4) : (x^2y^3 - 4y).$

7. Să se determine parametrii m, n, p astfel ca împărțirile:

- a) $(4x^3 - 29x^2 + 9x + m) : (x - 7);$ b) $(6x^3 - 5x^2 - 14x + n) : (2x - 3);$
 c) $(x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 18x + p) : (x^2 - 3x + 5)$ să se facă exact.

Să se efectueze:

8. $[2(x^2 - 2y)(2x^2 + y) - \frac{4}{5}(5x^2 - 2\frac{1}{2}y)(x^2 + 2y) + 8x^2y] : (-\frac{1}{4}xy).$
 9. $[(y^2 + 2x^2 + yz + 2xy)^2 - 4(x + y + z)(xy^2 + y^2z + x^3)] : (y^2 - 4xz).$
 10. a) $[(x + 1)^6 - 8x(x + 1)^4 + 32x^2(x + 1)^2 - 64x^3] : (x - 1)^2.$
 b) $[(x - 1)^6 + 8x(x - 1)^4 + 32x^2(x - 1)^2 + 64x^3] : (x + 4)^2.$

Fără a efectua împărțirea să se afle restul împărțirilor:

11. a) $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 2) : (x - 1)$ b) $(x^6 - x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 +$
 $+ 5x - 4) : (x + 1);$ c) $(x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 6) : (x - \frac{1}{2}).$

12. $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$ să se cerceteze dacă $P(x)$ este divizibil cu: $x + 1; x - 1; x + 2; x - 2.$

6) FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

În calcule, pentru a efectua rapid unele operații folosim formulele de calcul prescurtat.

Următoarele egalități sînt adevărate oricare ar fi numerele reale $x, y, z.$

1. Produsul de sumă prin diferență

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \quad (I)$$

2. Pătratul unui binom

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (\text{II})$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad (\text{III})$$

3. Cubul unui binom

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad (\text{IV})$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \quad (\text{V})$$

4. Alte formule de calcul prescurtat

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3 \quad (\text{VI})$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3 \quad (\text{VII})$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad (\text{VIII})$$

5. Pătratul unui polinom

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \quad (\text{IX})$$

Toate aceste formule se obțin folosind în special proprietatea care are loc într-un corp comutativ și care afirmă că pentru a înmulți o sumă cu altă sumă trebuie să înmulțim toți termenii primei sume cu toți termenii sumei a doua.

EXERCITII (5)

1. Să se efectueze:

a) $(2x + 1)(2x - 1)$; b) $(5x + 0,2)(5x - 0,2)$; c) $(5,2x^2 - 2,4y)(5,2x^2 + 2,4y)$.

2. Să se ridice la pătrat binoamele:

a) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2$; b) $(2x - 5y^2)^2$; c) $(2x^2y - 0,5z)^2$; d) $\left(\frac{2}{5}x^2y + \frac{1}{3}xy^2\right)^2$.

3. Să se ridice la cub binoamele:

a) $(3x + 2y)^3$; b) $(4x - \frac{1}{3}y)^3$; c) $(0,2x^2y + 5xy)^3$; d) $(1\frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3})^3$.

4. Să se efectueze, folosind formulele de calcul prescurtat, produsele:

a) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$.

Indicație:

Pentru a vedea dacă în acest caz putem folosi formula (VII), trebuie cercetat dacă al doilea factor al produsului conține ca termeni pătratele numerelor din primul factor, precum și produsul lor luat cu semn schimbat. Cantitățile considerate sînt $2x$ și -3 , pătratele lor $4x^2$ și 9 , iar produsul lor $6x$. Putem pune în evidență acest lucru astfel:

$$(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = (2x - 3)[(2x)^2 + 2x \cdot 3 + (3)^2] = (2x)^3 - 3^3 = 8x^3 - 27.$$

b) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$; c) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$;

d) $(x^2 - 5y)(x^4 + 5x^2y + 25y^2)$; e) $(2x^3 + 3y^3)(9y^6 - 6x^2y^3 + 4x^4)$.

5. a) $(0,25 - 0,5x^2 + x^4)(0,5 + x^2)$; b) $(\frac{1}{9}m^3 + \frac{1}{6}mx^2 + \frac{1}{4}x^4)(\frac{1}{3}m - \frac{1}{2}x^2)$;

c) $(5x - \frac{1}{2}y^2)(\frac{1}{4}y^4 + 5\frac{1}{2}xy^2 + 25x^2)$;

d) $(\frac{4}{49}y^2 + \frac{3}{35}x^2y + 0,09x^4)(0,3x^2 - \frac{2}{7}y)$.

Folosind formula $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, să se efectueze produsele:

6. a) $(x + 0,2)(x + 0,5)$; b) $(x - 0,4)(x - 0,3)$; c) $(x + 1)(x + 0,5)$;

d) $(y - \frac{1}{2})(y + \frac{1}{4})$; e) $(x + \frac{1}{3})(x + \frac{1}{5})$; f) $(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{6})$.

Să se ridice la pătrat polinoamele:

7. a) $(2x + 5y + 3z)^2$; b) $(3x^2 - 5x + 1)^2$; c) $(3a^2 + 2bc + 5)^2$;

d) $(x^2 + 0,5x - 1,2)^2$; e) $(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4})^2$; f) $(3x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1)^2$.

Folosind formulele de calcul prescurtat, să se scrie sub formă redusă polinoamele:

8. a) $(5x - 2)(5x + 2)(25x^2 + 4)$; b) $(2x + 3y)(3y - 2x)(4x^2 + 9y^2)$;

c) $(x^6 - 27x^3 + 729)(x^2 - 3x + 9)(x + 3)$; d) $(3x + 2y)(64y^3 - 216x^3y^3 + 729x^6)(9x^2 + 4y^2 - 6xy)$.

9. a) $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)(27x^3 - 8)$; b) $(4y - 5)(64y^3 + 125)(16y^2 + 25 + 20y)$; c) $(2x - 7y)(49y^2 + 14xy + 4x^2)(343y^3 + 8x^3)$;

d) $(ax^2 + by^3)(a^2x^4 - abx^2y^3 + b^2y^6)(a^3x^6 - b^3y^9)$.

10. a) $(7x - 1)(7x + 1)(49x^2 - 7x + 1)(49x^2 + 7x + 1)$;

b) $(3x + 5y)(3x - 5y)(9x^2 - 15xy + 25y^2 + 15xy + 9x^2)$;

c) $(16x^4 - 12x^2 + 9)(16x^4 + 12x^2 + 9)(4x^2 + 3)(4x^2 - 3)$;

d) $(3x - 0,2y^2)(9x^2 - 0,6xy^2 + 0,04x^4)(3x + 0,2y^2)(9x^2 + 0,6y^3 + 0,04y^4)$.

Folosind formulele de calcul prescurtat, să se calculeze:

11. $73 \cdot 67$; $92 \cdot 68$; $109 \cdot 111$; 79^2 ; 92^2 ; 998^2 ; 49^2 ; 99^3 ; 101^3 .

Indicații:

$$112 \cdot 88 = (100 + 12)(100 - 12).$$

$$63^2 = (60 + 3)^2.$$

$$98^3 = (100 - 2)^3.$$

7) METODE DE DESCOMPUNERE A POLINOAMELOR ÎN FACTORI IREDUCTIBILI

Un polinom cu coeficienți în corpul numerelor reale (respectiv raționale) și care nu poate fi scris sub forma unui produs de polinoame, factorii produsului fiind cel puțin de gradul întâi, se numește *polinom ireductibil* în mulțimea numerelor reale (respectiv raționale).

În cazul când polinomul nu este ireductibil, el poate fi scris sub forma unui produs de polinoame ireductibile. Operația prin care găsim factorii ireductibili ai unui polinom se numește descompunerea în factori. Orice polinom de gradul unu este ireductibil în mulțimea numerelor reale, pentru că, în caz contrar, ar însemna să poată fi pus sub forma unui produs de doi factori de gradul cel puțin unu, ceea ce este imposibil.

În general, la descompunerea polinoamelor în factori ireductibili folosim următoarele metode:

1. Metoda scoaterii factorului comun

Exemplu:

Să se descompună în factori polinomul $2x^2y + 3xy^2 - x^2y^2$. Avem:

$$2x^2y + 3xy^2 - x^2y^2 = xy(2x + 3y - xy).$$

EXERCITII (6)

Să se descompună în factori polinoamele:

a) $3a^2x + 6ax^2$; $5xy^2 - 10x^3y^4$; $x^m + x^{m+1}$; $x^{m+n} - x^m$; $x^{3n} - x^{2n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

b) $27ax^3 - 9a^2x^2 + 6a^3x$; $12x^5y^4 - 24x^4y^5 + 36x^3y^6 - 12x^2y^7$.

c) $x(x+a) - a(x+a) - 2(x+a)$; $x(x-y) - y(x-y)$;
 $(x+y+z)x + (x+y+z)y + (x+y+z)z$.

d) $a(2x-y) + b(y-2x) - c(y-2x)$; $x(x-2)^3 - 2x^2(2-x)^2 + x^3(x-2)$;
 $(x-a)^5 - 4a(x-a)^4 - 4a^2(a-x)^3$.

2. Folosirea formulelor de calcul prescurtat

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \quad (I)$$

Exemplu:

$$25x^2y^4 - 64m^6 = (5xy^2 + 8m^3)(5xy^2 - 8m^3).$$

EXERCITII (7)

Să se descompună în factori expresiile:

$$x^2 - 25y^2; a^4x^2 - 9b^2y^2; 9(2x + y)^2 - 16y^2; 49x^2 - 9(x - 4y)^2;$$

$$(3x - 2)^2 - (2x - 3)^2; 36x^2(3x - y)^2 - 25y^2(2x - 3y)^2.$$

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) \quad (\text{II})$$

Exemple:

$$x^3 - 216 = x^3 - 6^3 = (x - 6)(x^2 + 6x + 36);$$

$$8x^3 + 343y^3 = (2x)^3 + (7y^2)^3 = (2x + 7y^2)(4x^2 - 14xy^2 + 49y^4).$$

Exerciții

a) $x^3 - 64y^3; 8x^3 + 27y^3; 125x^3 - \frac{1}{8}y^3; \frac{1}{27}a^3x^3 + b^{12}y^3.$

b) $x^6 - 64y^6; a^4x^8 - b^4y^8; 64(x - 1)^6 - 1; x^{12} - y^{12}.$

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2 \quad (\text{III})$$

Când polinomul ce trebuie descompus în factori este un binom la pătrat, găsim întâi pătratele perfecte și apoi verificăm că al treilea termen reprezintă dublul produsului rădăcinilor pătrate din celelalte două. În cazul restrîngerii binomului diferență, putem lua oricare din termeni cu semnul minus și celălalt cu plus, deoarece:

$$a - b = -(b - a) \text{ și } (a - b)^2 = [-(b - a)]^2 = (b - a)^2.$$

Exemple:

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2 = (2x + 5y)^2$$

$$16x^2 - 56xy + 49y^2 = (4x^2 - 7y^2)^2 \text{ sau } (7y^2 - 4x^2)^2.$$

Exerciții:

a) $49x^2 + 70xy + 25y^2; 12xy - 4x^2 - 9y^2; \frac{4}{9}x^4 - \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{16}y^2;$

b) $x^2 - x + 0,25; 25y^2 - 4y + 0,16; x^2 - 2(a - b)^2x^2 + (a - b)^4.$

$$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3 \quad (\text{IV})$$

Când polinomul ce trebuie descompus în factori pare a fi descompunerea unui binom la cub, este necesar să găsim întâi termenii care reprezintă cuburile celor doi termeni ai binomului și apoi verificăm dacă ceilalți doi termeni reprezintă de trei ori produsul dintre pătratul unuia prin celălalt termen al binomului.

Exemple:

$$27a^3 + 54a^2b^2 + 36ab^4 + 8b^6 = (3a)^3 + (2b^2)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot 2b^2 + 3 \cdot 3a(2b^2)^2 = (3a + 2b^2)^3;$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x)^3 - (2)^3 - 3(x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 = (x - 2)^3.$$

Exerciții:

a) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$; $8x^3 - 3,6x^2y + 0,54xy^2 - 0,027y^3$;

b) $\frac{1}{64}x^6 - \frac{1}{8}x^4y + \frac{1}{3}x^2y^2 - \frac{8}{27}y^3$; $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}xy^2 - \frac{1}{27}y^3$.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x + y + z)^2 \quad (V)$$

Pentru restrângerea pătratului unui polinom se caută întâi pătratele perfecte și apoi se verifică dubbele produse de câte doi termeni ale rădăcinilor pătrate din pătratele perfecte găsite.

Exemple:

$$4x^4 + 16y^2 + z^6 + 16x^2y + 4x^2z^3 + 8yz^3 = (2x^2 + 4y + z^3)^2$$

$$25a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 20ab - 30ac + 12bc = (5a - 2b - 3c)^2.$$

Exerciții:

a) $4x^2 + y^2 - 4x + 4xy + 1 - 2y$; $x^2 + \frac{1}{4} + x - 2xy + y^2 - y$;

b) $\frac{1}{4}x^2 + 4 + y^2 - 2x - xy + 4y$; $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b) \quad (VI)$$

Exemple:

$$x^2 + 7x + 10 = x^2 + (5 + 2)x + 5 \cdot 2 = (x + 5)(x + 2).$$

Am căutat două numere care să aibă suma 7 și produsul 10. Apoi pe baza formulei VI am descompus termenul în factori:

$$x^2 + 6x - 16 = (x + 8)(x - 2), \text{ deoarece } 6 = 8 + (-2) \text{ și } -16 = 8 \cdot (-2).$$

Exerciții:

a) $x^2 - 9x + 18$; $x^2 + 8x + 12$; $x^2 + 3x - 10$; $x^2 - 2x - 15$;

b) $x^2 + 2x + 0,75$; $x^2 - x + 0,21$; $x^2 + x - 12$;

c) $x^2 - \frac{12}{35}x - \frac{1}{35}$; $x^2 + \frac{2}{35}x - \frac{1}{35}$; $x^2 - \frac{2}{35}x - \frac{1}{35}$.

d) $x^2 + 8xy + 15y^2$; $x^2 - 7xy + 12y^2$; $x^2 - 3xy - 10y^2$; $a^2 + 2ab - 15b^2$.

3. Metoda grupării termenilor

Se grupează convenabil termenii polinomului, în vederea scoaterii unor factori comuni parțiali, pentru a face să apară același factor în toate grupările făcute.

Exemple:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1);$$

$$ax - by + bz - ay + bx + az = a(x - y + z) + b(x - y + z) = (x - y + z)(a + b)$$

Exerciții:

a) $ax - ay + bx - by; x^3 + xy + xz + yz; x^3 + ax^3 + ax + a^3;$

b) $ax^2 - bx^2 - bx + ax - a + b; ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx.$

4. Separarea unui pătrat perfect

Unele polinoame pot fi descompuse, ca diferențe de pătrate, după ce în prealabil au fost puse în evidență pătrate perfecte.

Exemple:

$$x^2 + y^2 - 2xy - z^2 = (x^2 + y^2 - 2xy) - z^2 = (x - y)^2 - z^2 = (x - y + z)(x - y - z);$$

$$a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c);$$

$$x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = (x^4 + y^4 - 2x^2y^2) - x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 - y^2 + xy)(x^2 - y^2 - xy).$$

Exerciții:

a) $x^2 + y^2 + 2xy - a^2 - b^2 - 2ab; a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - a^2b^2c^2;$

b) $a^2 + 2ab + b^2 - 1; 9 - x^2 + 2xy - y^2; x^2 - y^2 + 2x + 1;$

c) $x^2 + y^2 - 2xy - z^2; 9x^2 - 12xy + 4y^2 - 25; 16a^2 - 36x^2 + 60xy - 25y^2.$

d) $x^4 + x^2 + 1; x^4 - 3x^2 + 1; x^4y^4 + a^4 + a^2x^2y^2; 3a^2x^2y^2 - x^4y^4 - a^4.$

5. Metode combinate

Această metodă constă în folosirea a două sau mai multe metode dintre cele expuse anterior.

Exemple:

$$4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9) = 4x(x + 3)(x - 3);$$

$$2x^2 - 4x^2y + 2xy^2 - 2xz^2 = 2x(x^2 - 2xy + y^2 - z^2) = 2x[(x^2 - 2xy + y^2) - z^2] = 2x[(x - y)^2 - z^2] = 2x(x - y + z)(x - y - z).$$

EXERCITII (8)

Să se descompună în factori polinoamele:

a) $5y^5 + 40y^2; 12x^4y^3 - 36x^2y^4 + 27y^5; 2x^3 - 6x + 4; 3y^3 + 27y + 54;$
 $5x^2 + 15x - 200; 3x^2 - 15x - 42.$

b) $x^4 - x^3 + x - 1; x^3 + 3x^2 - 4x - 12; x^5 - 3x^4 - x + 3; x^4 + 2x^3 - 2x - 1.$

c) $x^6 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1; x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1;$
 $x^6 + 4x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 32x - 32.$

d) $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16; x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4.$

1. $m^2x^2 + nx - n^2x^2 - mx$; $15(a^2 - x^2) + 5(a + x)^2 - 50a(a + x)$.

2. $x(x + 1)^2(x^2 + 1) + 1$.

3. $x^3 - x^2 + 2$; $x^3 + x^2 - 2$.

4. $3y^6 - 3y^4 + 6y^3 + 6y^2$; $5y^5 - 5y^3 - 10y^2 + 10y$.

5. $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 - (27x^3 + 8)$.

6. $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.

7. $(x^3 - a^3)^2 + (a^2 - x^2)^3$.

8. $(x - y)^2 + x(y - 1)^2 - y(x - 1)^2$.

9. $(x + y + z + xyz)^2 - (xy + yz + xz + 1)^2$.

31.10.1968

**Cel mai mare divizor comun
și cel mai mic multiplu comun
al polinoamelor descompuse în factori ireductibili**

Fie date polinoamele $P_1(x)$ și $P_2(x)$ descompuse în factori

$$P_1(x) = 2x^3(x + 2)^2(x - 1)^3;$$

$$P_2(x) = 2^3x^2(x + 2)^3(x - 1).$$

1) Numim cel mai mare divizor comun a două sau mai multe polinoame, polinomul de gradul cel mai mare care este divizor al tuturor polinoamelor date. Pentru a-l determina facem produsul factorilor ireductibili comuni, luați la puterile cele mai mici

Cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P_1(x)$ și $P_2(x)$ este $2x^2(x + 2)^2(x - 1)$.

2) Numim cel mai mic multiplu comun a două sau mai multe polinoame, polinomul de gradul cel mai mic care este multiplu pentru fiecare dintre polinoamele date.

Pentru a-l determina facem produsul factorilor ireductibili comuni și ne-comuni, luați la puterile cele mai mari.

Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor $P_1(x)$ și $P_2(x)$ este $2^3x^3(x + 2)^3(x - 1)^3$.

Cînd polinoamele nu sînt descompuse în factori se descompun cu metodele învățate și apoi se află cel mai mare divizor comun sau cel mai mic multiplu comun.

Exemple:

$$P_1(x) = x^2 - 2x + 1; P_2(x) = x - 1; P_3(x) = x^2 - 1.$$

Descompunem polinoamele în factori ireductibili și avem:

$$P_1(x) = (x - 1)^2; P_2(x) = x - 1; P_3(x) = (x + 1)(x - 1).$$

Cel mai mare divizor comun = $x - 1$; cel mai mic multiplu comun = $(x + 1)(x - 1)^2$.

EXERCITII (9)

1. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

a) $x^6 - 1$ și $x^4 - 1$. b) $x^4 - 1$ și $x^3 - 3x^2 + x - 3$.

c) $x^2 - 1$; $x^2 - x - 2$ și $x^3 + x^2 - 4x - 4$.

d) $x^4 - x^3 + x - 1$ și $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

2. Să se afle cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:

a) $x^2 + 2x + 1$; $x^2 - 1$ și $x + 1$.

b) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$; $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$; $x^3 + 1$; $x^3 - 1$ și $x^2 - 1$.

c) $x^2 - 1$; $x^2 + x - 2$ și $x^3 - x^2 - 4x + 4$.

d) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4$ și $x^3 + x^2 - 4x - 4$.

4. FRACȚII ALGEBRICE

Numim fracție algebrică sau expresie algebrică rațională, o expresie de forma $\frac{P}{Q}$, unde P și Q sînt polinoame.

Monomul fiind un caz particular al polinomului, înseamnă că expresia $\frac{2a^2b}{5xy}$ este tot o fracție algebrică.

De asemenea, cînd cei doi termeni ai fracției sînt monoame de gradul zero, avem tot o fracție algebrică, adică $\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{7}$. Deci, am regăsit, ca un caz particular al fracțiilor algebrice, numerele raționale.

Egalitatea fracțiilor. Două fracții algebrice $\frac{P}{Q}$ și $\frac{P_1}{Q_1}$ sînt egale dacă și numai dacă $PQ_1 = P_1Q$. Egalitatea $\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$ trebuie înțeleasă ca o propoziție adevărată oricare ar fi numerele reale prin care înlocuim variabilele (alese astfel ca operațiile care intervin să aibă sens).

Un polinom se poate scrie ca o fracție algebrică cu numitorul 1. Prin urmare, mulțimea polinoamelor este o submulțime a mulțimii fracțiilor algebrice.

Fracțiile $\frac{P}{Q}$ și $\frac{R \cdot P}{R \cdot Q}$ sînt egale pentru că $P \cdot (RQ) = (RQ) \cdot P$, deci

$$\frac{P}{Q} = \frac{RP}{RQ} \text{ cu condiția } R \neq 0 \quad (1)$$

(0 este polinomul nul).

Aceasta ne arată că dacă înmulțim cei doi termeni ai unei fracții algebrice cu același polinom (în particular, număr real) diferit de polinomul nul, se obține o fracție algebrică egală (*operația de amplificarea*). Pe această proprietate se bazează aducerea fracțiilor algebrice la același numitor.

Egalitatea (1) citită de la dreapta spre stînga ne arată că putem împărți cei doi termeni ai unei fracții algebrice cu aceeași expresie diferită de zero și se obține o fracție egală; această operație se numește *simplificare*.

Adunarea. Fiind date fracțiile algebrice $\frac{P}{Q}$ și $\frac{P_1}{Q_1}$, fracția $\frac{PQ_1 + P_1Q}{QQ_1}$ este suma fracțiilor date.

În cazul particular, cînd $Q = Q_1$, suma fracțiilor devine $\frac{P + P_1}{Q}$.

Înmulțirea fracțiilor algebrice. Fiind date fracțiile algebrice $\frac{P}{Q}$ și $\frac{P_1}{Q_1}$, fracția $\frac{PP_1}{QQ_1}$ este produsul fracțiilor date.

Deoarece fracțiile algebrice reprezintă numere reale arbitrare, regulile de calcul cu fracțiile algebrice vor fi regulile de calcul din corpul numerelor reale.

Admitem că toate operațiile cu fracții algebrice se fac în ipoteza că numitorii sînt diferiți de 0.

Observăm că la numărătorul și numitorul fracției produs apar produse de polinoame ale căror proprietăți le cunoaștem. Aceasta ne permite să verificăm ușor proprietățile înmulțirii fracțiilor algebrice.

RECAPITULARE PE BAZĂ DE EXERCIȚII

1) SIMPLIFICAREA FRACȚIILOR ALGEBRICE

În general, prin formularea *să se simplifice o fracție algebrică* se înțelege și că *se scrie fracția sub formă ireductibilă*.

În toate exercițiile în care intervin fracții algebrice, simplificarea și amplificarea se fac prin numere diferite de zero și nu vom mai preciza acest lucru de fiecare dată.

Exemple:

Să se simplifice fracțiile:

$$1. P = \frac{28a^2x^5y^2z^3}{25ax^2y^5z^3} (a \neq 0, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0).$$

Cel mai mare divizor comun al termenilor fracției este monomul $7ax^2y^2z^3$. Avem:

$$F = \frac{28a^2x^5y^2z^3}{35ax^3y^5z^3} = \frac{4ax^2z}{5y^3} \quad (ax^2y^5z^3 \neq 0).$$

$$2. F(x) = \frac{2x - 10}{5x - 25} \quad x \neq 5;$$

$$F(x) = \frac{2(x - 5)}{5(x - 5)} = \frac{2}{5}, x \neq 5$$

$$3. F(x, y) = \frac{6xy + 18x - 12y - 36}{4xy + 12x + 4y + 12} = \frac{6(xy + 3x - 2y - 6)}{4(xy + 3x + y + 3)} =$$

$$= \frac{6[x(y + 3) - 2(y + 3)]}{4[x(y + 3) + (y + 3)]} = \frac{6(y + 3)(x - 2)}{4(y + 3)(x + 1)}, (4xy + 12x + 4y + 12 \neq 0 \text{ sau } 4(y + 3)(x + 1) \neq 0, \text{ ceea ce înseamnă } y \neq -3, x \neq -1).$$

Simplificând prin $2(y + 3)$ obținem:

$$F(x, y) = \frac{3(x - 2)}{2(x + 1)},$$

$$4. F(x, y) = \frac{x^2 - (y + 1 - a)^2}{x^2 + 2ay + 1 - 2x - y^2 - a^2} = \frac{x^2 - (y + 1 - a)^2}{(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2ay + a^2)} =$$

$$= \frac{x^2 - (y + 1 - a)^2}{(x - 1)^2 - (y - a)^2} = \frac{(x + y + 1 - a)(x - y - 1 + a)}{(x - 1 + y - a)(x - 1 - y + a)} =$$

$$= \frac{x + y + 1 - a}{x + y - 1 - a}.$$

$$5. F(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^6 - 1} = \frac{(x^3 + 1) + 2x(x + 1)}{(x^3 + 1)(x^3 - 1)} =$$

$$= \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1)}{(x^3 + 1)(x^3 - 1)} =$$

$$= \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{(x^2 - x + 1)(x - 1)}.$$

$$6. F(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2y - x^3 - xy^2 + y^3} = \frac{(x^4 + y^4)(x^4 - y^4)}{x^2(y - x) + y^2(y - x)} =$$

$$= \frac{(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{(y - x)(x^2 + y^2)} = \frac{(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)}{(y - x)(x^2 + y^2)} =$$

$$= \frac{(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)}{-(x - y)(x^2 + y^2)} = -(x^4 + y^4)(x + y).$$

$$7. F(x) = \frac{(x + 2)^2(x^3 - 8)(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 - 4)(x^3 + 8)(x^2 + 2x + 4)} =$$

$$= \frac{(x + 2)^2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x^3 - 2x + 4)}{(x + 2)(x - 2)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)} = 1.$$

Observații: 1° Cînd cel mai mare divizor comun al termenilor este tocmai numitorul fracției, atunci numărătorul se împarte exact la numitor, iar fracția ireductibilă este un polinom definit pentru toate numerele reale care nu anulează numitorul sau o constantă (ex. 6, 7).

2° Cînd cel mai mare divizor comun al termenilor este tocmai numărătorul fracției, atunci fracția ireductibilă are numărătorul o constantă (ex. 5).

3° Factorii $x-y$ și $y-x$, care diferă numai prin semne, pot fi considerați factori comuni: $y-x = -(x-y)$ și pot fi deci simplificați, avînd însă grija să schimbăm semnul din fața rezultatului.

EXERCITII (10)

Să se simplifice fracțiile:

$$1. \frac{12a^2bc^2x^2}{18ab^3c^2y} ; \frac{10x^4y^3z^5}{25x^5y^3z^4} ; \frac{55a^2m^3x}{33am^3y} ; \frac{17x^4y^2}{51x^3y}$$

$$2. \frac{18ab^2 - 15b^3}{6ab} ; \frac{2x^2 - 4xy^2}{3x^3y - 6x^2y^3} ; \frac{18x^3 + 9x^2}{24x^3 - 6x}$$

$$3. \frac{x^2 - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} ; \frac{a^2 - a + 1}{a^3 + 1} ; \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4}$$

$$4. \frac{am + bm - ax - bx}{am - bm - ax + bx} ; \frac{a^3 + ax + a^2y + xy}{a^2 - ax + ay - xy}$$

$$5. \frac{(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 3x - 4)(x^2 + x - 6)} ; \frac{(a^2 + 6a + 8)(a^2 + 4a + 3)}{(a^2 + 5a + 6)(a^2 + 5a + 4)}$$

$$6. \frac{(x-1)^2y - (y-1)^2x}{x^2y^2 - 1} ; \frac{a(b^2 - 1) - b(a^2 - 1)}{a(b-1)^2 - b(a-1)^2}$$

$$7. \frac{(x^2 + y^2 - z^2)^2 - (x^2 - y^2 + z^2)^2}{4xy^2 - 4xyz} ; \frac{(x^2 + xy)^2 - (xy + y^2)^2}{(x^2 - xy)^2 - (xy - y^2)^2}$$

$$8. \frac{a^3b^3 - a^5b^3}{a^3b^3(1 - ab)^2 - a^3b^3(a - b)^2} ; \frac{x^4 - (p^2 + q^2)x^2 + p^2q^2}{x^2 + (p + q)x + pq}$$

$$9. \frac{x^2 + y^2 - z^2 - t^2 + 2(xy - zt)}{x^2 - y^2 + z^2 - t^2 + 2(xz - yt)} ; \frac{x^3 + y^3 + z^3 - t^3 + 2(xy + yz + xz)}{x^3 - y^3 - z^3 - t^3 - 2(yt + yz + zt)}$$

$$10. \frac{x^3 + ax^2 + ax + a - 1}{x^3 + bx^2 + bx + b - 1} ; \frac{(x+y)^3 + (x+y)^2 + x + y + 1}{(x+y)^3 - (x+y)^2 + x + y - 1}$$

$$11. \frac{x^{m+n}y^{m-n} - x^{m+n}y^{m+n}}{x^{p+n}y^{p-n} - x^{p-n}y^{p+n}} ; \frac{a^{n^2+2n+2} + a^{2n+1}}{a^{n^2+n+1} + a^n}$$

$$12. \frac{x^{a+b} + x^b y^a + x^a y^b + y^{a+b}}{x^{a+b} - x^b y^a + x^a y^b - y^{a+b}}; \quad \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} - 2x^{n-1} - x^{n-2}}{x^{n+2} - x^{n+1} - 2x^n + 2x^{n-1} + x^{n-2} - x^{n-3}}.$$

Să se arate că:

$$13. \frac{ab(a-1)(b-1) + (ab-1)(a^2b^2-1)}{ab(a+1)(b-1) + (ab-1)(a^2b^2+1)} = \frac{a^2b-1}{a^2b+1}.$$

$$14. \frac{(a^2+a+1)^2 - a(a+2)(2a+1)}{(a^2-a+1)^2 - a(a-2)(a^2+2)} = (a-1)^2.$$

Să se afle valoarea numerică a fracțiilor:

$$15. \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} \text{ pentru: a) } x = 4; \text{ b) } x = 2; \text{ c) } x = 1; \text{ d) } x = 0; \text{ e) } x = -2.$$

$$16. \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 3x + 12} \text{ pentru: a) } x = 5; \text{ b) } x = 3; \text{ c) } x = 1; \text{ d) } x = 0; \text{ e) } x = -6.$$

$$17. \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18} \text{ pentru: a) } x = -2; \text{ b) } x = 0; \text{ c) } x = 2; \text{ d) } x = 3; \\ \text{e) } x = 5.$$

$$18. \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1} \text{ pentru: a) } x = -2; \text{ b) } x = -1; \text{ c) } x = 0; \\ \text{d) } x = 1; \text{ e) } x = 2.$$

2) ADUCEREA FRAȚIILOR ALGEBRICE LA ACELAȘI NUMITOR

Ca și în aritmetică, în algebră, fracțiile algebrice pot fi aduse la același numitor, oricare ar fi aceste fracții, înlocuindu-le cu fracții echivalente, dar cu aceiași numitori.

Numitorul comun al unor fracții date este un multiplu comun al numitorilor fracțiilor considerate. Pentru a opera cu expresii cât mai simple, este bine să fie ales ca numitor comun chiar cel mai mic multiplu comun al numitorilor.

Exemple:

1. Să se aducă la același numitor fracțiile:

$$\frac{3x-1}{x^2-4x+4}; \quad \frac{3x+1}{x^2+4x+4}; \quad \frac{2x}{x-4}.$$

Vom afla mai întâi cel mai mic multiplu comun al numitorilor:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$M(x) = (x+2)^2(x-2)^2.$$

Pentru ca prima fracție să aibă, după amplificare, numitorul $M(x)$, va trebui amplificată cu:

$$M(x) : (x - 2)^2 = (x + 2)^2 (x - 2)^2 : (x - 2)^2 = (x + 2)^2.$$

A doua fracție trebuie amplificată cu:

$$M(x) : (x + 2)^2 = (x + 2)^2 (x - 2)^2 : (x + 2)^2 = (x - 2)^2,$$

iar a treia fracție cu:

$$M(x) : (x + 2)(x - 2) = (x + 2)^2 (x - 2) : (x + 2)(x - 2) = (x + 2)(x - 2).$$

Polinoamele $(x + 2)^2$, $(x - 2)^2$ și $(x + 2)(x - 2)$ cu care trebuie amplificate cele trei fracții se numesc *factorii complementari* ai fracțiilor respective.

Amplificând fracțiile date cu factorii complementari respectivi, obținem fracțiile echivalente cu cele date:

$$\frac{(3x - 1)(x + 2)^2}{(x + 2)^2(x - 2)^2}; \quad \frac{(3x + 1)(x - 2)^2}{(x + 2)^2(x - 2)^2}; \quad \frac{2x(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)^2(x - 2)^2}.$$

2. Să se aducă la același numitor fracțiile algebrice:

$$\frac{x - 1}{x^3 + 8}; \quad \frac{2x - 1}{x^4 + 4x^2 + 8x + 8}; \quad \frac{2x + 1}{x^3 - 4x^2 + 8x - 8}; \quad \frac{x + 1}{x^2 - 8}.$$

Descompunem numitorii în factori ireductibili, aflăm c.m.m.m.c. al numitorilor și factorii complementari ai fracțiilor:

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) \text{ fact. comp. } = (x - 2)(x^2 + 2x + 4);$$

$$x^3 + 4x^2 + 8x + 8 = (x + 2)(x^2 + 2x + 4) \text{ fact. comp. } = (x - 2)(x^2 - 2x + 4);$$

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = (x - 2)(x^2 - 2x + 4) \text{ fact. comp. } = (x + 2)(x^2 + 2x + 4);$$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \text{ fact. comp. } = (x + 2)(x^2 - 2x + 4).$$

$$M(x) = (x + 2)(x - 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4) = (x^3 + 8)(x^3 - 8) = x^6 - 64.$$

Amplificând fracțiile date cu factorii complementari respectivi, obținem fracțiile echivalente:

$$\frac{(x - 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x^6 - 64}; \quad \frac{(2x - 1)(x - 2)(x^2 - 2x + 4)}{x^6 - 64};$$

$$\frac{(2x + 1)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)}{x^6 - 64}; \quad \frac{(x + 1)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x^6 - 64}.$$

Produsele de la numărătorii fracțiilor obținute pot fi efectuate, dacă acest lucru este necesar, în vederea continuării calculelor.

3. Să se aducă la același numitor fracțiile algebrice:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}; \quad \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 1}.$$

Cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracțiilor sub formă dată este $(x - 1)^2(x^3 + 1)$. Se observă însă că ambele fracții pot fi simplificate: prima cu $x - 1$, dacă $x \neq 1$ iar a doua cu $x^2 - x + 1$. După simplificare, fracțiile devin:

$$\frac{x + 1}{x - 1}, \quad \frac{1}{x + 1}.$$

Cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracțiilor ireductibile obținute este $(x+1)(x-1)$, iar fracțiile aduse la același numitor sînt:

$$\frac{(x+1)^2}{x^2-1}, \quad \frac{x-1}{x^2-1}.$$

C.m.m.m.c. al numitorilor fracțiilor ireductibile este mai simplu (de grad mai mic) decît cel al numitorilor fracțiilor date.

Pentru a se lucra cu expresii mai simple este bine ca înainte de aducerea fracțiilor la același numitor să se facă simplificările posibile.

Observație: Cînd numitorii fracțiilor sînt polinoame coprime, numitorul comun este produsul lor. Cînd unul dintre numitori este multiplu comun al celorlalți, el este și numitorul comun al fracțiilor.

3) ADUNAREA ȘI SCĂDEREA FRAȚIILOR ALGEBRICE

Pentru a aduna fracții algebrice care au ca numitori același polinom, adunăm polinoamele de la numărători și dăm fracției ca numitor numitorul comun.

Dacă fracțiile algebrice nu au același numitor, se aduc mai întîi fracțiile la același numitor și apoi se adună.

Exemple:

$$1. \frac{3y^2}{5x^3} + \frac{2y}{5x^3} = \frac{3y^2 + 2y}{5x^3}.$$

$$2. \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{x^2 + 4x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(2x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 3)}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$3. \frac{x}{x+2} + \frac{x-1}{x-3} = \frac{x(x-3)}{(x+2)(x-3)} + \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} =$$

$$= \frac{x(x-3) + (x-1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{x^2 - 3x + x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 6}.$$

În practica obișnuită, pentru a se obține mai repede rezultatul, aducerea fracțiilor la același numitor și adunarea numărătorilor se fac în același timp, ca în exemplele următoare:

$$4. \frac{2x+1}{x-5} + \frac{x-3}{x+2} = \frac{2x^2 + x + 4x + 2 + x^2 - 3x - 5x + 15}{(x-5)(x+2)} = \frac{3x^2 - 3x + 17}{x^2 + 3x - 10}.$$

$$5. \frac{x+2}{x-1} + \frac{x-5}{x+1} + \frac{x+3}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} =$$

$$= \frac{(x+2)(x+1) + (x-5)(x-1) + (x+3)(x+1) + (x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 2 + x^2 - 6x + 5 + x^2 + 4x + 3 + x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{4x^2 - x + 11}{x^2 - 1}.$$

$$6. S = \frac{x^2 + 3x + 10}{x^3 - 27} + \frac{x - 9}{x^3 - 9} + \frac{-2x - 6}{x^3 + 6x + 9};$$

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9); \text{ f. c. } = (x + 3)^2;$$

$$x^3 - 9 = (x + 3)(x - 3); \text{ f. c. } = (x + 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 + 6x^2 + 18x + 27;$$

$$x^3 + 6x + 9 = (x + 3)^2; \text{ f. c. } = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - 27;$$

$$M(x) = (x + 3)^2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$S = \frac{(x^2 + 3x + 10)(x + 3)^2 + (x - 9)(x^3 + 6x^2 + 18x + 27) + (-2x - 6)(x^3 - 27)}{(x + 3)^2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} =$$

$$= \frac{x^4 + 9x^3 + 37x^2 + 87x + 90 + x^4 - 3x^3 - 36x^2 - 135x - 243 - 2x^4 - 6x^3 + 54x + 162}{(x + 3)^2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} =$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 9}{(x + 3)^2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)^2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{1}{x^3 - 27}.$$

Rezultatul a fost simplificat prin $(x + 3)^2$.

Pentru a scădea două fracții algebrice adunăm fracția descăzut cu opusul fracției scăzător.

Exemple:

$$1. \frac{2x^2}{3y} - \frac{5x}{3y} = \frac{2x^2}{3y} + \frac{(-5x)}{3y} = \frac{2x^2 - 5x}{3y}.$$

$$2. \frac{2x - 1}{x + 2} - \frac{x - 4}{x + 2} = \frac{2x - 1}{x + 2} + \frac{-(x - 4)}{x + 2} = \frac{2x - 1 - x + 4}{x + 2} = \frac{x + 3}{x + 2}.$$

$$3. \frac{x + 1}{x - 2} - \frac{x - 1}{x - 3} = \frac{x + 1}{x - 2} + \frac{-(x - 1)}{x - 3} = \frac{(x + 1)(x - 3) - (x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} =$$

$$= \frac{(x^2 + 4x + 3) - (x^2 - 3x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{x^2 + 4x + 3 - x^2 + 3x - 2}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{7x + 1}{x^2 + x - 6}.$$

Când avem de efectuat mai multe adunări și scăderi de fracții algebrice, aducem fracțiile la același numitor și apoi facem suma numărătorilor, ținând cont de faptul că la fracțiile cu semnul — în față trebuie să luăm opusul numărătorilor.

Exemplu:

$$\frac{5x - 3y}{x^2 - y^2} - \frac{1}{x + y} - \frac{3x^2 - 3xy + 3y^2}{x^3 + y^3}.$$

Descompunem numitorii în factori ireductibili:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \quad \text{f. c.} = x^2 - xy + y^2$$

$$x + y = x + y \quad \text{f. c.} = (x - y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad \text{f. c.} = x - y$$

$$M = (x + y)(x - y)(x^2 - xy + y^2) = (x - y)(x^3 + y^3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(5x - 3y)(x^2 - xy + y^2) - (x - y)(x^2 - xy + y^2) - (3x^2 - 3xy + 3y^2)(x - y)}{(x - y)(x^3 + y^3)} = \\ & = \frac{5x^2 - 8x^2y + 8xy^2 - 3y^2 - x^3 + 2x^2y - 2xy^2 + y^3 - 3x^3 + 6x^2y - 6xy^2 + 3y^3}{(x - y)(x^3 + y^3)} = \\ & = \frac{x^3 + y^3}{(x - y)(x^3 + y^3)} = \frac{1}{x - y}. \text{ În final, rezultatul a fost simplificat prin } x^3 + y^3. \end{aligned}$$

Dacă printre fracțiile algebrice care se adună sau se scad figurează și polinoame, considerăm polinoamele fracții algebrice cu numitorul 1 și procedăm după regulile cunoscute.

Exemplu:

$$\begin{aligned} \frac{x - y}{x + y} - (x - y + 1) + \frac{x + y}{x - y} &= \frac{(x - y)^2 + (-x + y - 1)(x^2 - y^2) + (x + y)^2}{x^2 - y^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2xy + y^2 - x^3 + x^2y - x^2 + xy^2 - y^3 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \\ &= \frac{-x^3 + x^2y + x^2 + xy^2 + 3y^2 - y^3}{x^2 - y^2}; \end{aligned}$$

EXERCITII (II)

Să se calculeze:

1. $\frac{1}{4a - 6b} - \frac{1}{4a + 6b} - \frac{3b}{9b^2 - 4a^2}; \quad \frac{1}{x - y} - \frac{3xy}{x^3 - y^3} - \frac{y - x}{x^2 + xy + y^2};$

2. $\frac{xy + 1}{x^2y - xy^2} - \frac{1}{x^2y - 2xy^2 + y^3} + \frac{1}{x^3 - 2x^2y + xy^2}.$

3. $\frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 3}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{x^3 + x - 5}{x^5 + 1}.$

4. $\frac{1}{2x^2y - 3xy^2 + xyz} + \frac{2}{2xyz - 3y^2z + yz^2} - \frac{3}{xz^3 - 3xyz + 2x^2y}.$

$$5. \frac{1}{(x-y)(y-z)} - \frac{1}{(y-z)(x-z)} - \frac{1}{(z-x)(y-x)}.$$

$$6. \frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-x)(y-z)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}.$$

$$7. \frac{a^2 - b^2 - c^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2 - c^2 - a^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{(c-a)(c-b)}.$$

1) ÎNMULȚIREA FRAȚIILOR ALGEBRICE

Pentru a înmulți două fracții algebrice, înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei.

Exemple:

$$1. \frac{2xy}{3z} \cdot \frac{5x^2}{7z} = \frac{(2xy) \cdot (5x^2)}{(3z) \cdot (7z)} = \frac{10x^3y}{21z^2}.$$

$$2. \frac{x+2}{x} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - x}.$$

Cînd avem de înmulțit o fracție algebrică cu un polinom, înmulțim numărătorul cu polinomul și lăsăm numitorul neschimbat, aceasta datorită faptului că orice polinom poate fi considerat fracție algebrică cu numitorul 1.

$$3. \frac{x+y}{x} \cdot (x+y) = \frac{(x+y)^2}{x}.$$

$$4. \frac{x+3}{x-1} \cdot (x-3) = \frac{x^2 - 9}{x-1}.$$

Cînd avem de înmulțit mai multe fracții algebrice, înmulțim mai întîi primele două, rezultatul îl înmulțim cu a treia, noul rezultat cu a patra ș.a.m.d., ceea ce revine la a înmulți toți numărătorii între ei și numitorii între ei.

$$5. \frac{x+y}{2x-y} \cdot \frac{x-y}{x+2y} \cdot \frac{x+3y}{x-2y} = \frac{(x+y)(x-y)(x+3y)}{(2x-y)(x+2y)(x-2y)}.$$

$$6. \frac{3xy^2z}{4abc} \cdot \frac{6a^2b}{5x^2y} \cdot \frac{10xz}{3bc^2} = \frac{180a^2bx^2y^2z^2}{60ab^2c^3x^3y} = \frac{3ayz^2}{bc^3x}.$$

În exemplul 6, rezultatul obținut a fost simplificat cu $60abx^2y$.

Este bine ca rezultatele obținute în urma unor operații cu fracții algebrice să fie reprezentate canonic (să fie scrise sub formă ireductibilă).

Simplificările se pot face chiar înainte de efectuarea înmulțirilor pentru a se scurta calculele.

În unele cazuri, pentru a se pune în evidență factorii care se pot simplifica, este necesar să se descompună în factori termenii fracțiilor, ca în exemplele următoare:

$$7. \frac{2x - 3y + 5}{3x - 1} \cdot \frac{x + 4}{6y - 4x - 10} \cdot \frac{9x - 3}{x^2 - 16} = \frac{3}{-2(x - 4)} = -\frac{3}{2(x - 4)}.$$

5) RIDICAREA LA PUTERE A FRAȚIILOR ALGEBRICE

A ridica fracția $\frac{P}{Q}$ la puterea $n (n \in \mathbb{N})$ înseamnă a calcula produsul a n factori egali cu $\frac{P}{Q}$:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \underbrace{\frac{P}{Q} \cdot \frac{P}{Q} \cdot \frac{P}{Q} \cdot \dots \cdot \frac{P}{Q}}_{n \text{ factori}} = \frac{\overbrace{P \cdot P \cdot P \cdot \dots \cdot P}^{n \text{ factori}}}{\underbrace{Q \cdot Q \cdot Q \cdot \dots \cdot Q}_{n \text{ factori}}} = \frac{P^n}{Q^n}.$$

Rezultă că:

Pentru a ridica o fracție algebrică la o putere întreagă pozitivă, ridicăm separat fiecare termen al fracției la acea putere.

Exemple:

$$\begin{aligned} 1. \left(\frac{(2x)^3}{(3y^2)^3}\right) &= \frac{(2x)^3}{(3y^2)^3} = \frac{8x^3}{27y^6}; & 2. \left(-\frac{x+1}{x+2}\right)^2 &= \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2}; \\ 3. \left(-\frac{2x+1}{x-2}\right)^5 &= -\frac{(2x+1)^5}{(x-2)^5}; & 4. \left(\frac{2x^2-3x+1}{3x-2}\right)^2 &= \frac{(2x^2-3x+1)^2}{(3x-2)^2}. \end{aligned}$$

6) ÎMPĂRȚIREA FRAȚIILOR ALGEBRICE

Cîtuț a două fracții algebrice $\frac{P}{Q}$ și $\frac{P_1}{Q_1}$ este tot o fracție algebrică, obținută prin înmulțirea primeia cu inversa fracției a doua:

$$\frac{P}{Q} : \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{Q_1}{P_1} = \frac{PQ_1}{P_1Q}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} 1. \frac{12x^2yz^2}{5ab^3} : \frac{6xy^3z^2}{25a^2b^2} &= \frac{12x^2yz^2}{5ab^3} \cdot \frac{25a^2b^2}{6xy^3z^2} = \frac{10ax^3}{by^3}. \\ 2. \frac{x+2}{x-1} : \frac{x-3}{x-2} &= \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x-2}{x-3} = \frac{x^2-4}{x^2-4x+3}. \end{aligned}$$

$$3. (2x - 3x + 2) : \frac{x-3}{x+1} = (2x^2 - 3x + 2) \cdot \frac{x+1}{x-3} = \frac{(2x^2 - 3x + 2)(x+1)}{x-3}.$$

$$4. \frac{x^2-9}{x+2} : (x^2-6x+9) = \frac{x^2-9}{x+2} \cdot \frac{1}{x^2-6x+9} = \\ = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-3)^2} = \frac{x+3}{x^2-x-6}.$$

În exemplul de mai sus, înainte de efectuarea înmulțirii am descompus în factori și am simplificat.

$$5. \frac{x}{3x+2} : \frac{y}{3x+2} = \frac{x}{3x+2} \cdot \frac{3x+2}{y} = \frac{x}{y}.$$

În exemplul 5 am avut de efectuat o împărțire a două fracții algebrice cu același numitor. Rezultatul este citul dintre numărători. Pe baza acestei observații putem găsi mai repede citul unor astfel de fracții.

Alte exemple:

$$6. \frac{x+2}{(x^2-2x+1)(x^2+1)} : \frac{x^2-4}{(x^2-2x+1)(x^2+1)} = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}.$$

$$7. \frac{x+y-z}{x^{10}+y^8+z^6} : \frac{x-y+z}{x^{10}+y^8+z^6} = \frac{x+y-z}{x-y+z}.$$

Citul a două fracții algebrice poate fi scris și sub formă de fracție:

$$\frac{\frac{x+y}{x-y} : \frac{2x+y}{x+2y}}{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x+2y}{2x+y}}{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{x+2y}{2x+y}.$$

O fracție ca cea din membrul doi se numește *fracție algebrică etajată* sau *fracție algebrică generalizată*.

7) EXERCITII CU TOATE OPERAȚIILE ASUPRA FRAȚIILOR ALGEBRICE

Cînd într-o expresie algebrică se întîlnesc mai multe operații asupra fracțiilor algebrice, vom conveni să efectuăm operațiile în ordinea stabilită în aritmetică: ridicările la putere, înmulțirile și împărțirile, adunările și scăderile.

Exemplu:

Să se efectueze:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+4x+4} : \frac{x+2}{x-3} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - \frac{x+2}{x^2+2x+1} : \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{x-1}{x+1} \\
 E &= \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{(x+2)^2} \cdot \frac{x-3}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{(x-1)^2} - \frac{(x+2)(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{x-1} + \\
 &+ \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} - \frac{x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+2)(x+1) + (x-3)(x+1) - (x+2)^2}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \\
 &= \frac{x^2+3x+2+x^2-2x-3-x^2-4x-4}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{x^2-3x-5}{(x+1)(x-1)(x+2)}.
 \end{aligned}$$

Când într-o expresie algebrică ce conține fracții algebrice figurează și paranteze, se efectuează mai întâi operațiile din paranteze, în ordinea stabilită.

Exemple:

1. Să se efectueze:

$$E = 1 + \left(x - \frac{1}{1-x} \right) : \frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}.$$

$$E = 1 + \frac{x-x^2-1}{1-x} : \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2} = 1 + x-1 = x.$$

2. Să se efectueze:

$$E = 1 - 1 : \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} \cdot \left(x - \frac{x^2+y^2}{y} \right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right).$$

$$\begin{aligned}
 E &= 1 - 1 : \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} \cdot \left(\frac{xy-x^2-y^2}{y} : \frac{y-x}{xy} \right) = \\
 &= 1 - 1 : \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} \cdot \frac{-(x^2-xy+y^2)}{y} \cdot \frac{xy}{-(x-y)} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.
 \end{aligned}$$

Cîtu dintre două expresii poate fi scris în două moduri: fie folosind parantezele, fie folosind linia de fracție:

Exemplu:

$$E = \left(\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \right) : \left(\frac{x^2}{x^3-y^3} - \frac{x}{x^2+xy+y^2} \right) = \frac{\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x^2}{x^3-y^3} - \frac{x}{x^2+xy+y^2}} = 3$$

Rezultă că atunci cînd avem de efectuat exerciții cu fracții etajate trebuie să calculăm separat numărătorul și separat numitorul, iar cînd aceștia au fost aduși la forma cea mai simplă, calculăm și cîtu lor.

EXERCITII (12)

Să se efectueze:

$$1. \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{ay - by} \cdot \frac{a - b}{y} \cdot \frac{x^2 - xy}{x + y}; \frac{x^2}{4x^3 - 12x + 9} \cdot \frac{2x + 3}{x^2} \cdot (2x - 3).$$

$$2. \frac{a^2 + 4x^2 + 4ax}{3x - y} \cdot \frac{(y - 3x)^4}{a^3 + 6a^2x + 12ax^2 + 8x^3} \cdot \frac{2x + a}{27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3}.$$

$$3. \frac{mx}{ax - ay} : \frac{2ax}{bx - by}; \frac{(2a - x)^2 (2x - a)}{(x + 2a)(a + 2x)^2} : \frac{(x - 2a)(a - 2x)^2}{(x + 2a)^2 (a + 2x)}.$$

Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

$$4. \left(\frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} \right) : \left(\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y} \right).$$

$$5. \left(1 + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} \right) : \left(1 + \frac{x^2 + z^2 - y^2}{2xz} \right).$$

$$6. \left(\frac{x}{x + 2y} - \frac{x + 2y}{2y} \right) \cdot \left(\frac{x}{x - 2y} - 1 + \frac{8y^3}{8y^3 - x^3} \right).$$

$$7. \frac{1}{x - 1} - \left(\frac{x - 2y}{x - y} - \frac{2}{1 - x} - \frac{x - y^2}{x^2 - x + y - xy} \right) : \frac{x^2 - y^2}{x}.$$

$$8. -\frac{a^2}{a + b} - \left(\frac{a^2}{a + b} - \frac{a^3}{a^2 + b^2 + 2ab} \right) : \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} + \frac{a}{b - a} \right).$$

$$9. \left(\frac{x^2 + y^2}{x} + y \right) \left(y - \frac{y^2}{x + y} \right) : \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}.$$

$$10. \frac{xy}{x + y} : \left(\frac{x^2}{x^3 + x^2y - xy^2 - y^3} - \frac{2xy^2}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} + \frac{y^2}{x^3 - x^2y - xy^2 + y^3} \right).$$

$$11. \left(\frac{a + 2}{a - 2} \right)^3 : \frac{a^3 + 4a^2 + 4a}{3a^2 - 12a + 12} \cdot \frac{a}{3}.$$

$$12. \left(\frac{a}{ab - b^2} + \frac{b}{ab^2 - 2a^2b + a^3} : \frac{1}{b - a} \right) \cdot \frac{ab}{a^3 + b^3}.$$

$$13. \frac{1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{x^2 + x}{x^3 - 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - x} - \frac{x}{1 - x^3} \right).$$

$$14. \left(\frac{x^2 + 8}{x^3 - 8} + \frac{x}{x^2 + 2x + 4} - \frac{1}{x - 2} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{2}{2 - x} \right).$$

$$15. \frac{8 + m^3}{a^2 - b^2} : \frac{2m - 4 - m^2}{b - a} \cdot \left(a + \frac{ab + b^2}{a + b} \right) : \frac{1}{m + 2}.$$

$$16. \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{3}{x^3 + 1} + \frac{3}{x^3 - x + 1} \right) \cdot \left(x - \frac{2x - 1}{x + 1} \right).$$

$$17. \frac{4x^2}{x^4 + x^3 + x + 1} : \left(\frac{1}{x^3 + 2x + 1} - \frac{2}{x + 1} \cdot \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \right).$$

$$18. \left(\frac{3}{a - b} + \frac{3a}{a^3 + b^3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} \right) : \frac{2a + b}{a^3 + 2ab + b^2} : \frac{3}{a - b}.$$

$$19. \frac{\frac{x^2 + y^2}{y} - x}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} : \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}.$$

$$20. \left(\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) : \left(\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = -3$$

$$21. \left(\frac{\frac{2a}{1 - a^2} + b}{1 - \frac{2ab}{1 - a^2}} - a \right) : \left(1 + a \cdot \frac{\frac{2a}{1 - a^2} + b}{1 - \frac{2ab}{1 - a^2}} \right).$$

$$22. x + \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x-1}} ; \frac{1}{1 + \frac{2}{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{x} + 1 - \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}} + \frac{\frac{1x}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{x} + x$$

EGALITĂȚI. ECUAȚII. SISTEME DE ECUAȚII

1. ECUAȚIA DE GRADUL ÎNȚI CU O NECUNOSCUȚĂ

Fie M o mulțime. O propoziție referitoare la elementele mulțimii M în care figurează o singură dată semnul „ $=$ ” se numește *egalitate*. Semnele care figurează în partea stângă a semnului „ $=$ ” se spune că formează *membrul stâng* al egalității, iar semnele care figurează în partea dreaptă a semnului „ $=$ ” se spune că formează *membrul drept* al egalității. O egalitate poate fi *adevărată* (exemplu: $3 \cdot 5 = 15$) sau *falsă* (exemplu $3 \cdot 7 = 10$).

Dacă o egalitate este exprimată printr-o propoziție deschisă (vezi Capitolul I), în care figurează de exemplu literele x, y, z prin care se notează elemente arbitrare ale mulțimii, sînt posibile următoarele cazuri:

α) egalitatea este adevărată oricare ar fi $x \in M, y \in M, z \in M$.

Exemplu:

Egalitatea $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ este adevărată oricare ar fi $x \in R, y \in R, z \in R$;

β) egalitatea este adevărată numai cînd se înlocuiesc literele x, y, z cu anumite elemente din M .

O astfel de egalitate se numește în mod curent *ecuație*. Dacă ecuația este exprimată printr-o propoziție în care figurează o singură literă (de exemplu, x) se spune că ecuația este cu o necunoscută (necunoscuta x); dacă ecuația este exprimată printr-o propoziție deschisă în care figurează două litere (de exemplu, x și y) se spune că ecuația este cu două necunoscute (x și y). Se folosește o terminologie analogă în cazul cînd apar mai multe litere.

Dacă o ecuație se exprimă printr-o propoziție deschisă în care figurează necunoscuta x și aceasta devine *adevărată*, dacă înlocuim pe x cu 2, se spune că numărul 2 este o *soluție* a ecuației și se scrie $x = 2$. Se mai spune că numărul 2 *verifică* sau *satisfacă* egalitatea respectivă.

Dacă o ecuație se exprimă printr-o propoziție deschisă în care intervin două necunoscute x și y și propoziția devine adevărată dacă înlocuim pe x cu 2 și pe y cu 3, se spune că sistemul format din numerele 2 și 3 este o solu-

ție a ecuației și se scrie $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$. Se mai spune că sistemul $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ verifică sau *satisface* egalitatea respectivă.

În loc de „aflarea soluțiilor unei ecuații” se mai spune „aflarea necunoscutelor ecuației” sau „rezolvarea ecuației”.

Exemple:

1. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și ecuația $x + 3 = 4$ ($x \in A$). Dacă înlocuim pe x cu 1, 2, 3, 4 observăm că propoziția „ $x + 3 = 4$ ” devine adevărată numai dacă înlocuim pe x cu 1. Așadar, soluția ecuației este numărul 1. ($x = 1$). Numărul 1 verifică egalitatea $x + 3 = 4$.

2. Fie mulțimea $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și ecuația $2x + y = 5$ ($x \in B, y \in B$). Înlocuind pe x și y cu 1, 2, 3, 4, 5 observăm că propoziția devine adevărată când $x = 1$ și $y = 3$ sau când $x = 2$ și $y = 1$. Așadar ecuația dată admite două soluții

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Implicația

Fie două propoziții P și Q . Dacă ori de câte ori propoziția P este adevărată este adevărată și propoziția Q (altfel spus: presupunind că P este adevărată, rezultă că și Q este adevărată), se spune că propoziția P implică propoziția Q și se scrie $P \Rightarrow Q$. În particular, dacă propoziția P este o ecuație, iar propoziția Q este o ecuație, se spune că ecuația P implică ecuația Q .

De exemplu, fie mulțimea $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ și ecuațiile $x = y$ și $x^2 = y^2$ ($x \in A, y \in A$). Prima ecuație are soluțiile:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Se verifică că toate aceste soluții sînt și soluții ale ecuației $x^2 = y^2$, adică „ori de câte ori este adevărată propoziția $x = y$ este adevărată și propoziția $x^2 = y^2$ ”. Așadar,

$$x = y \Rightarrow x^2 = y^2.$$

Se observă că ecuația a doua mai are și alte soluții în afară de soluțiile primei ecuații, de exemplu, soluția $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ ($2^2 = (-2)^2$).

Ecuația E_1 implică ecuația E_2 , atunci și numai atunci, cînd toate soluțiile ecuației E_1 sînt și soluții ale ecuației E_2 (dar nu neapărat, orice soluție a ecuației a doua este o soluție a primei ecuații).

Propoziții echivalente

Se spune că propozițiile P și Q sînt echivalente dacă $P \Rightarrow Q$ și în același timp $Q \Rightarrow P$. Dacă propozițiile P și Q sînt echivalente se scrie $P \Leftrightarrow Q$.

Dacă $P \Rightarrow Q$ și $Q \Rightarrow P$ înseamnă că ori de câte ori propoziția P este adevărată este adevărată și propoziția Q și reciproc, ori de câte ori este adevărată pro-

poziția Q este adevărată și propoziția P . Aceasta arată că două propoziții sînt echivalente dacă sînt simultan adevărate (și deci simultan false).

Dacă propozițiile echivalente P și Q sînt ecuații, se spune că cele două ecuații sînt echivalente. Din $P \Rightarrow Q$ rezultă că soluțiile ecuației P sînt printre soluțiile ecuației Q , iar din $Q \Rightarrow P$ rezultă că soluțiile ecuației Q sînt printre soluțiile ecuației P și deci cele două ecuații au aceleași soluții.

Două ecuații sînt echivalente atunci și numai atunci cînd au aceleași soluții.

De exemplu, fie mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și ecuațiile $x^2 = 1$, $2x^2 - 2 = 0$ ($x \in A$). Se constată, înlocuind pe x cu toate elementele mulțimii A că ecuația $x^2 = 1$, are soluțiile 1 și -1 și acestea verifică și ecuația $2x^2 - 2 = 0$.

Deci, $x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0$.

În mod analog se arată că $2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$.

Așadar, $x^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0$.

ECUAȚII ÎN CORPUL NUMERELOR REALE

Ne vom ocupa acum de ecuații exprimate prin propoziții deschise în care toate semnele care intervin desemnează numere reale și operații cu acestea. A rezolva o asemenea ecuație înseamnă a afla numerele reale cu care trebuie înlocuite necunoscutele astfel încît propoziția respectivă să fie adevărată.

Pentru a rezolva o ecuație, de obicei se transformă aceasta într-o ecuație echivalentă ale cărei soluții sînt evidente (ecuația a doua are aceleași soluții cu ecuația inițială).

Vom arăta acum care sînt principiile pe baza cărora putem transforma o ecuație într-una echivalentă.

Teoremele care urmează sînt adevărate în orice corp, deci în particular în corpul numerelor reale.

Fie literele x, y, a prin care desemnăm elementele dintr-un corp oarecare.

T e o r e m a $1 \cdot x = y \Leftrightarrow x + a = y + a$, adică, dacă adunăm în ambii membri ai unei egalități același element, obținem o egalitate echivalentă cu prima,

Demonstrație

Faptul că $x = y \Rightarrow x + a = y + a$, rezultă din aplicarea proprietății L_2 , capitolul I, operații.

Să arătăm acum că $x + a = y + a \Rightarrow x = y$.

În acest scop să adunăm în ambii membri ai egalității $x + a = y + a$, elementul $-a$ (existența acestui element este asigurată de proprietatea A_4).

Avem: $x + a = y + a \Rightarrow (x + a) + (-a) = (y + a) + (-a) \Rightarrow x + [a + (-a)] = y + [a + (-a)] \Rightarrow x + 0 = y + 0 \Rightarrow x = y$. (S-a aplicat asociativitatea și proprietățile A_4 și A_3 .)

Din $x = y \Rightarrow x + a = y + a$ și $x + a = y + a \Rightarrow x = y$ rezultă că $x = y \Leftrightarrow x + a = y + a$.

Exemple:

$$1. x = 4 \Leftrightarrow x + 3 = 4 + 3 \text{ sau } x = 4 \Leftrightarrow x + 3 = 7.$$

$$2. x + \frac{1}{3} + \frac{x-2}{3} = 5x + \frac{5}{4} \Leftrightarrow x + \frac{1}{3} + \frac{x-2}{3} + 7 = 5x + \frac{5}{4} + 7.$$

Teorema 2. Dacă trecem un termen dintr-un membru al unei egalități în membrul celălalt schimbându-i semnul, obținem o egalitate echivalentă cu cea inițială.

Fie $x = y + a$. Să arătăm că $x = y + a \Leftrightarrow x - a = y$.

Avem:

$$a) x = y + a \Rightarrow x + (-a) = y + a + (-a) \Rightarrow x - a = y;$$

$$b) x - a = y \Rightarrow x - a + a = y + a \Rightarrow x = y + a.$$

Din cele două implicații rezultă: $x = y + a \Leftrightarrow x - a = y$.

Teorema 3. Fie $a \neq 0$. Avem $x = y \Leftrightarrow ax = ay$, adică dacă înmulțim ambii membri ai unei egalități cu un element diferit de 0, obținem o egalitate echivalentă cu prima.

Implicația $x = y \Rightarrow ax = ay$ ($a \neq 0$) apare din proprietatea L_2 menționată mai înainte.

Să arătăm acum că: $ax = ay \Rightarrow x = y$ ($a \neq 0$).

În acest scop să înmulțim ambii membri ai egalității $ax = ay$ ($a \neq 0$) cu inversul lui a (existența acestuia este asigurată de proprietatea M_4).

Avem

$$ax = ay \Rightarrow \frac{1}{a} a \cdot x = \frac{1}{a} \cdot ay \Rightarrow x = y.$$

Așadar,

$$ax = ay (a \neq 0) \Leftrightarrow x = y.$$

Exemple:

$$1. 2x = 3 \Leftrightarrow 2 \cdot 2x = 2 \cdot 3 \text{ sau } 2x = 3 \Leftrightarrow 4x = 6.$$

$$2. \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = 4x \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right) = 4 \cdot 4x \text{ sau } \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = 4x \Leftrightarrow x + 2 = 16x.$$

Observație. a) Dacă $a = 0$, atunci egalitatea $x = y$ nu este echivalentă cu egalitatea $ax = ay$.

Exemplu:

Fie ecuația $x = 1$. Înmulțind în ambii termeni cu 0 obținem $0 \cdot x = 0 \cdot 1$ sau $0 = 0$ egalitate care este adevărată oricare ar fi x . Ecuația $x = 1$ nu este echivalentă cu $0 = 0$, căci prima este adevărată numai dacă înlocuim pe x cu 1.

b) $x = y \Leftrightarrow \frac{1}{a}x = \frac{1}{a}y$ ($a \neq 0$), adică dacă împărțim ambii membri ai unei egalități cu același număr diferit de 0 obținem o egalitate echivalentă.

Exemplu

$$2x = 8 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \text{ sau } 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

c) Înmulțind cu -1 schimbăm semnul tuturor termenilor ecuației inițiale.

Exemplu

$$-5x - 4 = -3x - 2 \Leftrightarrow 5x + 4 = 3x + 2.$$

ECUAȚIA DE GRADUL ÎNTÎI CU O NECUNOSCUTĂ

Se numește ecuație de gradul întâi, în corpul numerelor reale R , cu necunoscuta x , orice ecuație echivalentă cu o ecuație de forma $ax = b$, unde $a \in R$, $b \in R$, și $a \neq 0$. (Literalele a și b reprezintă numere reale determinate.) Numărul b îl vom numi *termenul liber*, iar numărul a îl vom numi *coeficientul necunoscutei*.

A rezolva ecuația $ax = b$ în corpul numerelor reale înseamnă a afla numerele reale x pentru care propoziția $ax = b$ este adevărată.

Exemple de ecuații de gradul întâi:

$$3x = 4;$$

$$-\frac{1}{3}x = 5;$$

$$2x = -5;$$

$$-8x = -7.$$

Pentru a rezolva ecuația $ax = b$ ($a \neq 0$) înmulțim ambii membri cu numărul $\frac{1}{a}$.

$$\text{Avem: } ax = b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot a \cdot x = \frac{1}{a} \cdot b \text{ sau}$$

$$ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}.$$

Ecuația $x = \frac{b}{a}$ are soluția evidentă $\frac{b}{a}$.

Așadar, ecuația $ax = b$ ($a \neq 0$) are o soluție și numai una, și anume pe $x = \frac{b}{a}$ (cîtu dintre termenul liber și coeficientul necunoscutei).

Exemple:

$$3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3};$$

$$-4x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{-4} = -2;$$

$$3x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{3};$$

$$\frac{3}{4}x = \frac{5}{7} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{21}.$$

În cazul când ecuația nu se prezintă sub forma $ax = b$ se transformă într-o ecuație echivalentă de această formă urmîndu-se următoarele puncte:

- a) Se desfac parantezele (dacă există).
- b) Se înmulțesc ambii membri ai ecuației, deci toți termenii ecuației, cu numitorul comun al tuturor numitorilor, cînd ecuația conține fracții. (Se aplică teorema 3). Această operație se numește *eliminarea numitorilor*.
- c) Se trec toți termenii care conțin necunoscuta în membrul stîng și ceilalți termeni în membrul drept (se aplică teorema 2). Făcîndu-se reducerile și calculele, se aduce ecuația la forma $ax = b$, care are soluția $x = \frac{b}{a}$.

Exemple:

$$1. 3(x + 7) = 3(5 - x).$$

$$\begin{aligned} \text{Avem: } 3(x + 7) &= 3(5 - x) \Leftrightarrow 3x + 21 = 15 - 3x \Leftrightarrow 3x + 3x = \\ &= 15 - 21 \Leftrightarrow 6x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{6}. \end{aligned}$$

Așadar ecuația inițială are soluția $x = -1$.

Observație. Rezolvarea ecuației $3(x + 7) = 3(5 - x)$ se reduce la determinarea mulțimii:

$$\{x \in R \mid 3(x + 7) = 3(5 - x)\}.$$

$$\text{Avem: } \{x \in R \mid 3(x + 7) = 3(5 - x)\} = \{-1\}.$$

$$2. \frac{3(x - 2)}{2} + \frac{1}{3} = 2x - \frac{1}{2}.$$

Avem:

$$\frac{3(x - 1)}{2} + \frac{1}{3} = 2x - 1 \Leftrightarrow \overset{3)}{\frac{3x - 3}{2}} + \overset{2)}{\frac{1}{3}} = 2x - 1.$$

Numitorul comun al tuturor numitorilor este 6. Când vom înmulți prima fracție cu 6, se simplifică cu 2 și rămâne 3. Acest fapt va fi subliniat prin scrierea $\frac{3x-3}{2}$. În mod analog se procedează cu ceilalți termeni. Obținem în continuare ecuațiile echivalente:

$9x - 9 + 2 = 12x - 6 \Leftrightarrow 9x - 12x = -6 + 9 - 2 \Leftrightarrow -3x = 1$. Această ecuație are soluția $x = -\frac{1}{3}$.

$$\text{Așadar, } \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3(x-2)}{2} + \frac{1}{3} = 2x - \frac{1}{2} \right\} = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}.$$

3. Să se rezolve ecuația:

$$m - 1 + \frac{2m}{3} = \frac{1}{4}.$$

(Necunoscuta este m)

Avem:

$$\begin{aligned} 12) \quad m - 1 + \frac{2m}{3} &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow 12m - 12 + 8m = 3 \Leftrightarrow 12m + 8m = 3 + 12 \Leftrightarrow 20m = \\ &= 15 \Leftrightarrow m = \frac{15}{20} \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

DISCUȚIA ECUAȚIEI DE GRADUL ÎNȚI

Se poate întâmpla ca o ecuație să conțină în afară de litera cu care se notează necunoscuta și alte litere care desemnează numere reale determinate, dar neprecizate efectiv. (Acestea se numesc parametri.)

Exemple:

1. $\frac{(2-m)x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3x-4m}{2}$. Această ecuație mai conține litera m (conține parametrul m).

2. $\frac{(a-3)x}{5-b} + \frac{(b-c)x}{4-c} = \frac{a+b+c}{3-a}$. Această ecuație mai conține literele a, b, c (conține parametrii a, b, c).

Pentru rezolvarea acestor ecuații se procedează la fel ca la ecuațiile tratate mai înainte, adică se aduce ecuația la forma $ax = b$ și se ține seama că soluția $x = \frac{b}{a}$ este obținută în ipoteza $a \neq 0$.

Se vor trata două cazuri:

- cazul când coeficientul lui x este 0;
- cazul când coeficientul lui x este diferit de 0.

Studierea acestor cazuri se numește *discuția ecuației*.

Dacă ecuația conține fracții se mai pune condiția ca toți numitorii să fie diferiți de 0, pentru ca toate operațiile care intervin să aibă sens. (Discuția se face în ipoteza că numitorii sînt diferiți de 0).

Exemplu:

1. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$3mx + 2(x - 2m) = 4(x - 3).$$

Obținem: $3mx + 2x - 4m = 4x - 12 \Leftrightarrow 3mx + 2x - 4x = -12 + 4m \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x(3m - 2) = -12 + 4m.$ (Am dat în factor necunoscuta.)

Cazuri:

a) Coeficientul lui x este 0, adică $3m - 2 = 0$ sau $3m = 2$, de unde $m = \frac{2}{3}$;

În acest caz înlocuind în ecuație obținem:

$$x \cdot 0 = -12 + 4 \cdot \frac{2}{3} \text{ sau } 0 = -\frac{28}{3} \text{ egalitate care este falsă. În acest caz nu}$$

există nici un număr real x care să verifice egalitatea respectivă. (Ecuația nu are soluții.)

Se spune în acest caz că ecuația este *imposibilă* sau *incompatibilă*.

b) Coeficientul lui x este diferit de 0, adică $3m - 2 \neq 0$, ceea ce înseamnă că $m \neq \frac{2}{3}$.

În acest caz din $x(3m - 2) = -12 + 4m$, deducem $x = \frac{-12 + 4m}{3m - 2}$.

Așadar, în acest caz, ecuația are o singură soluție.

2. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\frac{m-n}{m+n}x - \frac{2(m^2+n^2)}{(m-n)^2} = \frac{m+n}{n-m}x.$$

Întîi trebuie să determinăm condițiile în care numitorii se anulează.

Obținem: $m+n=0$ și $m-n=0$, adică $m=-n$ sau $m=n$.

Deci admitem că $m \neq n$ și $m \neq -n$ (în caz contrar fracțiile care intervin nu au sens).

Eliminînd numitorii (prin înmulțirea cu numitorul comun $(m-n)^2(m+n)$) și trecînd prin toate etapele menționate mai înainte, obținem:

$$\frac{(m-n)x}{m+n} - \frac{2(m^2+n^2)}{(m-n)^2} = \frac{(m+n)x}{n-m}$$

$$(m-n)^3x - 2(m+n)(m^2+n^2) = -(m-n)(m+n)^2x$$

$$(m-n)^3x + (m-n)(m+n)^2x = 2(m+n)(m^2+n^2)$$

$$(m-n)x[(m-n)^2 + (m+n)^2] = 2(m+n)(m^2+n^2)$$

$$(m-n)x(m^2 - 2mn + n^2 + m^2 + 2mn + n^2) = 2(m+n)(m^2+n^2)$$

$$2(m-n)(m^2+n^2)x = 2(m+n)(m^2+n^2).$$

Coeficientul lui x este diferit de 0, deoarece în ipotezele în care lucrăm toți factorii produsului $2(m-n)(m^2+n^2)$ sînt diferiți de 0. (Într-adevăr, $2 \neq 0$, $m-n \neq 0$ căci $m \neq n$ și $m^2+n^2 \neq 0$, căci m^2+n^2 este 0, atunci și numai atunci cînd $m=n=0$, situație care a fost exclusă.)

Rezolvînd ecuația obținem:

$$x = \frac{2(m+n)(m^2+n^2)}{2(m-n)(m^2+n^2)} \text{ sau simplificînd cu } 2(m^2+n^2) \neq 0 \text{ deducem:}$$

$$x = \frac{m+n}{m-n}.$$

Așadar, dacă $m \neq n$ și $m \neq -n$, atunci ecuația dată are o singură soluție, și anume $x = \frac{m+n}{m-n}$. În cazul $m = n$ sau $m = -n$, termenii care compun ecuația nu sînt toți definiți.

3. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$(m-1)x = m^2 - 1.$$

C a z u r i:

a) Coeficientul lui x este 0, adică $m-1=0$, sau $m=1$.

Dacă $m=1$ obținem:

$0x=0$, egalitate care este adevărată oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Orice număr real este o soluție a ecuației. În acest caz se spune că ecuația este *nedeterminată*.

b) Coeficientul lui x este diferit de 0, adică $m \neq 1$.

În acest caz obținem:

$$x = \frac{m^2-1}{m-1}.$$

Simplificînd cu $m-1 \neq 0$, deducem:

$$x = m+1.$$

Așadar,

dacă $m=1$, ecuația este *nedeterminată*;

dacă $m \neq 1$, ecuația are o singură soluție, și anume:

$$x = m+1.$$

4. Să se rezolve ecuația:

$$2 - \frac{x}{x-1} = \frac{2x-3}{x-1}.$$

În cazul cînd necunoscuta se află la numitor, punem întîi condiția ca numitorii să fie diferiți de 0, pentru ca fracțiile să aibă sens. În cazul nostru trebuie să avem $x \neq 1$.

În ipoteza $x \neq 1$, adică $x-1 \neq 0$, eliminăm numitorii și avem:

$$2 - \frac{x}{x-1} = \frac{2x-3}{x-1} \Leftrightarrow 2x - 2 - x = 2x - 3 \Leftrightarrow -x = -1 \text{ sau } x = 1.$$

Ținînd cont că s-a lucrat în ipoteza $x \neq 1$ (deoarece fracțiile care intervin în ecuație au sens numai dacă $x \neq 1$), deducem că ecuația dată nu are soluții. Această ecuație este *imposibilă*.

2. SISTEME DE ECUAȚII

Să considerăm ecuațiile cu două necunoscute: $3x - 5y = 7$, $2x - 3y = 5$. Folosind conjuncția „și” putem forma afirmația „ $3x - 5y = 7$ și $2x - 3y = 5$ ”.

Se știe că această afirmație este adevărată atunci și numai atunci când propoziția „ $3x - 5y = 7$ ” este adevărată și în același timp propoziția „ $2x - 3y = 5$ ” este adevărată. Afirmația „ $3x - 5y = 7$ și $2x - 3y = 5$ ” se spune că este un sistem de două ecuații, cu două necunoscute (x și y). În loc de „ $3x - 5y = 7$ și $2x - 3y = 5$ ” se scrie

$\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$. Ecuațiile $3x - 5y = 7$ și $2x - 3y = 5$

se numesc ecuațiile sistemului. Dacă înlocuind necunoscutele cu numere reale determinate și propozițiile $3x - 5y = 7$ și $2x - 3y = 5$ devin adevărate, se spune că perechea de numere respectivă este o *soluție* a sistemului. De exem-

plu, perechea de numere $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ este o soluție a sistemului. Într-adevăr, propoziția $3x - 5y = 7$ este adevărată dacă înlocuim pe x cu 4 și pe y cu 1, căci egalitatea $3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 7$ este adevărată; propoziția $2x - 3y = 5$ este, de asemenea, adevărată dacă înlocuim pe x cu 4 și pe y cu 1, căci egalitatea $2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$ este adevărată.

În loc de notația $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ se mai întrebuințează pentru notarea soluțiilor și semnul $(4, 1)$, atunci când nu există posibilitatea vreunei confuzii.

Observație. Fiecare ecuație are, în general, și soluții diferite de soluțiile sistemului. De exemplu, ecuația $3x - 5y = 7$ are o infinitate de soluții. (Pentru a obține o soluție a ecuației $3x - 5y = 7$, dăm unei necunoscute o valoare, și aflăm cealaltă necunoscută. Dacă, de exemplu, facem $y = 2$, obținem $3x - 5 \cdot 2 = 7$, de unde deducem $x = \frac{17}{3}$ și deci am obținut urmă-

toarea soluție a ecuației: $\begin{cases} x = \frac{17}{3} \\ y = 2 \end{cases}$. Înlocuind aceste valori în ecuația a doua

obținem o propoziție falsă, deci sistemul de numere $\begin{cases} x = \frac{17}{3} \\ y = 2 \end{cases}$ nu este o solu-

ție a sistemului. Soluțiile sistemului sînt soluțiile comune ale ecuațiilor care compun sistemul.

Se întrebuințează o terminologie analogă, în cazul cînd se lucrează cu mai multe ecuații și mai multe necunoscute.

De exemplu, se va spune că afirmația „ $3x - y + 3z = 2$ și $2x - 5y + 8z = -3$ și $2x - 15y - 3z = -13$ ” este un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute (x , y și z) și se va nota astfel:

$$\begin{cases} 3x - y + 3z = 2 \\ 2x - 5y + 8z = -3 \\ 2x - 15y - 3z = -13. \end{cases}$$

Acest sistem admite soluția $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, căci înlocuind pe x cu 1, pe y cu 1 și pe z cu 0, toate cele trei egalități devin adevărate.

În loc de $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ se mai scrie $(1, 1, 0)$, atunci când nu există posibilitatea

vreunei confuzii.

SISTEME ECHIVALENTE

Pentru a ilustra noțiunea de sisteme echivalente vom alege cazul când un sistem este format din trei ecuații exprimate prin propozițiile deschise P_1 , P_2 , P_3 .

Sistemul „ P_1 și P_2 și P_3 ” este echivalent cu sistemul „ P'_1 și P'_2 și P'_3 ”, dacă afirmațiile „ P_1 și P_2 și P_3 ” și „ P'_1 și P'_2 și P'_3 ” sînt echivalente, deci dacă sînt simultan adevărate. Rezultă că *două sisteme sînt echivalente atunci și numai atunci cînd au aceleași soluții*. Dacă cele două sisteme sînt echivalente, vom scrie

$$\begin{cases} P_1 & P'_1 \\ P_2 & \Leftrightarrow P'_2 \\ P_3 & P'_3 \end{cases}$$

Vom întrebuința notații și o terminologie analogă în cazul cînd avem mai multe ecuații.

TEOREME PRIVIND ECHIVALENȚA SISTEMELOR

Teorema 1. Dacă într-un sistem de ecuații se înlocuiește o ecuație, sau mai multe, cu o ecuație, respectiv mai multe, echivalente cu cele înlocuite, obținem un sistem echivalent cu cel inițial.

Vom face demonstrația în cazul unui sistem de trei ecuații.

Fie sistemul „ P_1 și P_2 și P_3 ” și $P_1 \Leftrightarrow P'_1$.

Avem evident $(P_1 \text{ și } P_2 \text{ și } P_3) \Leftrightarrow (P'_1 \text{ și } P_2 \text{ și } P_3)$, căci cele două afirmații sînt adevărate simultan (propozițiile P_1 și P'_1 sînt adevărate simultan prin ipoteză).

Transformarea unei ecuații, sau a unui număr de ecuații ale unui sistem în ecuații echivalente se face folosind teoremele de echivalență cunoscute de la ecuații.

În enunțarea teoremelor care urmează ne vom referi la un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute x, y, z , scrise sub forma

$$E_1(x, y, z) = E_2(x, y, z), \quad F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z), \quad G_1(x, y, z) = G_2(x, y, z)$$

(s-a pus în evidență expresia algebrică din membrul stîng și din membrul drept al ecuațiilor sistemului).

Rezultatele pe care le vom demonstra pe acest caz sînt valabile pentru toate sistemele.

Teorema 2. Dacă într-un sistem de ecuații înmulțim cei doi membri ai unei ecuații, sau ai unui număr de ecuații, cu un număr real diferit de 0, obținem un sistem echivalent.

Să arătăm că dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$ atunci

$$\begin{cases} E_1(x, y, z) = E_2(x, y, z) \\ F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) \\ G_1(x, y, z) = G_2(x, y, z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aE_1(x, y, z) = aE_2(x, y, z) \\ bF_2(x, y, z) = bF_2(x, y, z) \\ G_1(x, y, z) = G_2(x, y, z) \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Într-adevăr, prin înmulțirea cu a și b , am înlocuit două ecuații ale sistemului inițial cu două ecuații echivalente (Teorema 3 de la echivalența ecuațiilor) și atunci pe baza Teoremei 1 enunțată mai înainte, obținem rezultatul dorit.

Teorema 3. Dacă înlocuim o ecuație a unui sistem cu ecuația care are în membrul stîng suma dintre membrii stîngi a două ecuații, iar în membrul drept, suma dintre membrii dreپți a aceluiași ecuații, obținem un sistem echivalent cu cel inițial.

Să arătăm, de exemplu, că

$$\begin{cases} E_1(x,y,z) = E_2(x,y,z) \\ F_1(x,y,z) = F_2(x,y,z) \\ G_1(x,y,z) = G_2(x,y,z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E_1(x,y,z) = E_2(x,y,z) \\ F_1(x,y,z) + G_1(x,y,z) = F_2(x,y,z) + G_2(x,y,z) \\ G_1(x,y,z) = G_2(x,y,z) \end{cases}$$

Să arătăm întâi că $(E_1 = E_2 \text{ și } F_1 = F_2 \text{ și } G_1 = G_2) \Leftrightarrow (E_1 = E_2 \text{ și } F_1 + G_1 = F_2 + G_2 \text{ și } G_1 = G_2)$. Pentru ușurința scrierii n-am mai scris parantezele în care sînt indicate necunoscutele.

Să presupunem că afirmația $(E_1 = E_2 \text{ și } F_1 = F_2 \text{ și } G_1 = G_2)$ este adevărată. Aceasta înseamnă că admitem că egalitatea $E_1 = E_2$ este adevărată, egalitatea $F_1 = F_2$ este adevărată și egalitatea $G_1 = G_2$ este adevărată.

Dar, $F_1 = F_2$ fiind adevărată și $G_1 = G_2$ fiind adevărată, rezultă că $F_1 + G_1 = F_2 + G_2$ este adevărată și deci în ipoteza menționată, afirmația „ $E_1 = E_2$ și $F_1 + G_1 = F_2 + G_2$ și $G_1 = G_2$ ” este adevărată, ceea ce demonstrează implicația: $(E_1 = E_2 \text{ și } F_1 = F_2 \text{ și } G_1 = G_2) \Rightarrow (E_1 = E_2 \text{ și } F_1 + G_1 = F_2 + G_2 \text{ și } G_1 = G_2)$.

Să arătăm acum că $(E_1 = E_2 \text{ și } F_1 + G_1 = F_2 + G_2 \text{ și } G_1 = G_2) \Rightarrow (E_1 = E_2 \text{ și } F_1 = F_2 \text{ și } G_1 = G_2)$. În acest scop să presupunem că afirmația „ $E_1 = E_2$ și $F_1 + G_1 = F_2 + G_2$ și $G_1 = G_2$ ” este adevărată, adică admitem că egalitățile $E_1 = E_2$, $F_1 + G_1 = F_2 + G_2$, $G_1 = G_2$ sînt toate adevărate. Egalitatea $G_1 = G_2$ fiind adevărată, deducem că egalitatea $G_1 - G_2 = 0$ este adevărată.

În egalitatea $F_1 + G_1 = F_2 + G_2$ dacă adunăm în ambii membri pe $-G_2$ obținem:

$$F_1 + G_1 = F_2 + G_2 \Leftrightarrow F_1 + \underbrace{G_1 - G_2}_0 = F_2 + \underbrace{G_2 - G_2}_0 \Leftrightarrow F_1 = F_2. \text{ Așadar, în}$$

ipoteza că egalitățile $E_1 = E_2$, $F_1 + G_1 = F_2 + G_2$ și $G_1 = G_2$ sînt adevărate am dedus că și egalitatea $F_1 = F_2$ este adevărată și deci afirmația „ $E_1 = E_2$ și $F_1 = F_2$ și $G_1 = G_2$ ” este adevărată.

T e o r e m a 4. Dacă într-un sistem de ecuații una dintre ecuații este exprimată printr-o egalitate E_1 care are în membrul stîng o necunoscută, iar în membrul drept o expresie algebrică care conține celelalte necunoscute, înlocuind necunoscuta din membrul stîng al egalității E_1 prin expresia algebrică din membrul drept, în celelalte ecuații, obținem un sistem de ecuații echivalent cu cel inițial.

Pentru demonstrație vom considera cazul:

$$\begin{cases} x = E(y,z) \\ F_1(x,y,z) = F_2(x,y,z) \end{cases} \text{ și vom arăta că } \begin{cases} x = E(y,z) \\ F_1(E(y,z), y, z) = F_2(E(y,z), y, z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = E(y,z) \\ F_1(E(y,z), y, z) = F_2(E(y,z), y, z) \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

În acest scop, vom arăta că orice soluție a sistemului (1) este o soluție a sistemului (2) și reciproc, orice soluție a sistemului (2) este o soluție a sistemului (1).

Fie (x_0, y_0, z_0) o soluție a sistemului (1). Aceasta înseamnă că toate egalitățile următoare sînt adevărate: $x_0 = E(y_0, z_0)$ și $F_1(x_0, y_0, z_0) = F_2(x_0, y_0, z_0)$.

Faptul că egalitatea $x_0 = E(y_0, z_0)$ este adevărată înseamnă că semnele x_0 și $E(y_0, z_0)$ reprezintă același număr real. Dacă egalitatea $F_1(x_0, y_0, z_0) = F_2(x_0, y_0, z_0)$ este adevărată, atunci ea rămîne adevărată și dacă înlocuim pe x_0 cu un alt semn care reprezintă același număr real, deci cu $E(y_0, x_0)$. Așadar, în ipoteza menționată mai înainte, egalitatea $F_1[E(y_0, z_0), y_0, z_0] = F_2[E(y_0, z_0), y_0, z_0]$ este adevărată și prin urmare orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului:

$$\begin{cases} x = E(y, z) \\ F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) \end{cases} \quad \text{este și o soluție a sistemului:}$$

$$\begin{cases} x = E(y, z) \\ F_1[E(y, z), y, z] = F_2[E(y, z), y, z]. \end{cases}$$

Se demonstrează analog că orice soluție a sistemului (2) este o soluție a sistemului (1) și deci cele două sisteme sînt echivalente.

Observație. Folosirea teoremei 4 permite ca într-o ecuație să exprimăm o necunoscută cu ajutorul celorlalte necunoscute, prin înlocuirea acesteia în celelalte ecuații, care să conțină o necunoscută mai puțin.

SISTEME DE ECUAȚII DE GRADUL ÎNTÎI

1) SISTEME DE DOUĂ ECUAȚII DE GRADUL ÎNTÎI CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Se numește sistem de două ecuații de gradul întîi cu două necunoscute x și y , orice sistem echivalent cu un sistem de forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \quad (I)$$

unde prin literele a, b, c, a', b', c' am notat numere reale determinate. A rezolva acest sistem înseamnă a afla acele numere reale x și y care înlocuite în cele două egalități fac ca acestea să devină adevărate.

a) **Metoda reducerii.** Pentru a rezolva un sistem de forma (I) prin metoda reducerii, se înmulțesc cei doi membri ai celor două ecuații astfel încît prin adunare să se reducă o necunoscută.

Exemplu:

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Dacă ne propunem să eliminăm pe y înmulțim ambii membri ai primei ecuații cu 3 și ambii membri ai ecuației a doua cu -4 , și obținem sistemul:

$$\begin{cases} 9x + 12y = 21 \\ -8x - 12y = -24. \end{cases}$$

Pe baza teoremei 2 de la sisteme putem afirma că sistemul obținut este echivalent cu sistemul inițial. Adunând membru cu membru cele două ecuații obținem ecuația $x = -3$ și deci înlocuind una din ecuațiile sistemului $\begin{cases} 9x + 12y = 21 \\ -8x - 12y = -24 \end{cases}$ cu ecuația $x = -3$ obținem un sistem echivalent cu acesta, de exemplu, sistemul $\begin{cases} 9x + 12y = 21 \\ x = -3. \end{cases}$ (teorema 3 de la sisteme).

Deoarece ecuația $9x + 12y = 21$ este echivalentă cu ecuația $3x + 4y = 7$ a sistemului inițial, putem înlocui sistemul $\begin{cases} 9x + 12y = 21 \\ x = -3, \end{cases}$ cu sistemul echivalent $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ x = -3. \end{cases}$

Înlocuind pe x cu -3 în ecuația $3x + 4y = 7$, obținem $3(-3) + 4y = 7$, de unde $y = 4$. Așadar sistemul inițial are soluția $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$. Calculele făcute vor fi uneori redactate astfel:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} & \begin{array}{l} | \cdot 3 \\ | \cdot (-4) \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 12y = 21 \\ -8x - 12y = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 12y = 21 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ x = -3 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-3) + 4y = 7 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Sistemul are o soluție, și anume, sistemul de numere $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$

Altă scriere a soluției: $(-3, 4)$

Observație. De obicei se menține ecuația sistemului inițial care este mai simplă.

b) **Metoda substituției.** Această metodă se folosește astfel: se află o necunoscută dintr-o ecuație (în funcție de cealaltă necunoscută) și apoi se înlocuiește în ecuația a doua (se folosește teorema 4 de la sisteme etc.) și se obține astfel o ecuație cu o necunoscută.

Exemplu:

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + 3y = -9 \end{cases} \text{ . Aflând pe } x \text{ din prima ecuație obținem } x = \frac{5y + 7}{3} \text{ . Înlocuind în}$$

ecuația a doua avem: $\frac{2(5y+7)}{3} + 3y = -9$. Eliminând numitorii și desfăcând parantezele obținem:

$$10y + 14 + 9y = -27, \text{ de unde } 19y = -41 \text{ sau } y = -\frac{41}{19}.$$

Înlocuind pe y cu $-\frac{41}{19}$ în ecuația $x = \frac{5y+7}{3}$ găsim:

$$x = \frac{5 \cdot \left(-\frac{41}{19}\right) + 7}{3}, \text{ sau } x = \frac{-205+133}{19}, \text{ sau } x = -\frac{24}{19}.$$

Așadar, sistemul inițial are o soluție, și anume:

$$\begin{cases} x = -\frac{24}{19} \\ y = -\frac{41}{19} \end{cases} \cdot \text{ Altă scriere: } \left(-\frac{24}{19}, -\frac{41}{19}\right).$$

Observație. Dacă sistemul nu este dat sub forma $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ se aduce la această formă folosindu-se pentru fiecare ecuație procedeele cunoscute de la ecuații. Pentru simplificarea calculelor în cazul când ecuațiile conțin fracții se elimină numitorii. În continuare se aplică una dintre metodele precizate mai înainte.

Exemplu:

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{3(x+y)}{2} - \frac{1}{3} = x \\ x+y=3 \end{cases} \quad \text{Avem: } \begin{cases} \frac{3x+3y}{2} - \frac{1}{3} = x \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x+9y-2=6x \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+9y=2 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+9y=2 \\ -3x-3y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y=-7 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{7}{6} \\ x=3+\frac{7}{6} \end{cases}$$

$$\text{Sistemul admite o soluție și anume } \begin{cases} x = \frac{25}{6} \\ y = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

Altă scriere a soluției: $\left(\frac{25}{6}, -\frac{7}{6}\right)$.

Observație. Acest sistem se putea rezolva și înlocuind pe $x+y$ cu 3 (din ecuația a doua) în prima ecuație. În felul acesta obținem o ecuație cu o necunoscută etc.

2) SISTEME DE TREI ECUAȚII DE GRADUL ÎNTII CU TREI NECUNOSCUTE

Se numește sistem de trei ecuații de gradul întâi cu trei necunoscute x, y și z , orice sistem echivalent cu un sistem de forma:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'', \end{cases}$$

unde literele $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$ reprezintă numere reale determinate.

Pentru rezolvarea unui astfel de sistem se folosesc două metode:

a) *Metoda reducerii*. Se reduce o necunoscută, de exemplu, din prima și a doua ecuație, apoi se reduce aceeași necunoscută din prima și a treia ecuație. Din teoremele de echivalență rezultă că sistemul format dintr-o ecuație a sistemului inițial și cele două ecuații obținute în urma reducerii unei necunoscute este echivalent cu sistemul inițial. Două dintre ecuații vor conține numai două necunoscute și pentru aflarea acestora se folosesc metodele de rezolvare a sistemelor de gradul întâi cu două necunoscute. Pentru aflarea necunoscutei a treia se înlocuiesc valorile găsite pentru aceste necunoscute în ecuația care conține necunoscuta a treia.

Exemplu:

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ x - 3y - z = 5 \\ 2x - y - z = 3. \end{cases}$$

Vom reduce necunoscuta z între prima ecuație și a doua ecuație. Prin adunarea acestor ecuații obținem ecuația $4x - y = 12$. Reducând pe z din prima ecuație și ecuația a treia (prin adunarea acestora) obținem ecuația $5x + y = 10$. Sistemul inițial este echivalent cu sistemul format, menținând una dintre ecuațiile acestuia, de exemplu ecuația $3x + 2y + z = 7$ și înlocuind celelalte două ecuații cu ecuațiile obținute prin reducerea lui z , mai precis sistemul inițial este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ 4x - y = 12 \\ 5x + y = 10. \end{cases}$$

Pentru a afla necunoscutele x și y este suficient să considerăm ultimele două ecuații. Rezolvând sistemul format din ultimele două ecuații (prin reducere) obținem prin

adunare $9x = 22$, de unde $x = \frac{22}{9}$. Înlocuind pe x cu $\frac{22}{9}$ în ecuația $5x + y = 10$,

obținem $y = \frac{-20}{9}$. Înlocuind pe x cu $\frac{22}{9}$ și pe y cu $\frac{-20}{9}$ în prima ecuație, obținem

$$z = \frac{37}{9}.$$

Așadar, sistemul dat are o singură soluție, și anume:

$$\begin{cases} x = \frac{22}{9} \\ y = \frac{-20}{9} \text{ sau altfel notată: } \left(\frac{22}{9}, \frac{-20}{9}, \frac{37}{9}\right) \\ z = \frac{37}{9} \end{cases}$$

b) *Metoda substituției.* Se află o necunoscută dintr-o ecuație (în funcție de celelalte două ecuații) și se înlocuiește în celelalte două ecuații și astfel acestea vor deveni ecuații cu două necunoscute.

Exemplu:

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 3x + 4y - 3z = 4 \end{cases}$$

Aflându-l pe z din prima ecuație, obținem $z = 1 - x + y$ și înlocuind în celelalte ecuații, obținem ecuațiile: $2x + y - 2(1 - x + y) = 1$ și $3x + 4y - 3(1 - x + y) = 4$, cu două necunoscute. Pentru a afla necunoscutele x și y considerăm aceste ecuații și rezolvăm sistemul format din aceste ecuații. Acest sistem după calcule devine:

$$\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 6x + y = 7 \end{cases} \text{ care prin rezolvare dă } x = 1 \text{ și } y = 1.$$

Înlocuind aceste valori în ecuația $z = 1 - x + y$, obținem $z = 1$.

Sistemul admite o singură soluție, și anume:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ . Altă scriere a soluției: } (1, 1, 1).$$

În cazul sistemelor cu mai multe necunoscute se procedează analog cu cazul sistemelor cu trei necunoscute.

SISTEME NEDETERMINATE ȘI INCOMPATIBILE

Exemple:

1. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 10 = -6y \end{cases}$$

Trecînd termenul $6y$ din ecuația a doua în membrul stîng și pe -10 în membrul drept și împărțind cu 2, obținem sistemul echivalent cu sistemul inițial:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 3y = 5. \end{cases}$$

Deoarece cele două ecuații sînt identice, orice soluție a ecuației $x + 3y = 5$ este o soluție a sistemului. Ecuația $x + 3y = 5$ are o infinitate de soluții. Pentru a afla o soluție a acestei ecuații dăm lui x o valoare, de exemplu k , și aflăm o valoare corespunzătoare a lui y . Dacă $x = k$, obținem

$$y = \frac{5-k}{3}. \text{ Așadar, orice pereche de numere de forma } \begin{cases} x = k \\ y = \frac{5-k}{3} \end{cases}, \text{ unde}$$

$k \in \mathbb{R}$, este o soluție a sistemului dat.

În acest caz se spune că sistemul este *nedeterminat*.

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 13. \end{cases}$$

Înmulțim prima ecuație cu numărul real -2 și adunînd membrii celor două ecuații obținem:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y = -10 \\ 2x + 4y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0 = 3 \end{cases}.$$

Deoarece ecuația a doua este falsă oricare ar fi x și y , sistemul nu are nici o soluție. Se spune că în acest caz sistemul este *incompatibil*, sau *imposibil*.

3. Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$\begin{cases} x + my = 5 \\ 2x + 3y = 10. \end{cases}$$

Avem

$$\begin{cases} x + my = 5 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2my = -10 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(3 - 2m) = 0 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}.$$

Dacă în ecuația $y(3 - 2m) = 0$, avem $3 - 2m \neq 0$, adică $m \neq \frac{3}{2}$, atunci aceasta are o singură soluție și anume $y = 0$. Înlocuind în ecuația $2x + 3y = 10$, obținem $2x = 10$, deci $x = 5$. Așadar, în acest caz sistemul are soluția $\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$. Dacă $m = \frac{3}{2}$, înlocuind în prima ecuație a sistemului, obținem:

$$x + \frac{3}{2}y = 5,$$

de unde, eliminând numitorii, deducem $2x + 3y = 10$. În acest caz ecuațiile sistemului sînt identice. Orice soluție a ecuației $2x + 3y = 10$ este o soluție a sistemului.

Înlocuind pe x cu k , obținem $y = \frac{10 - 2k}{3}$.

În acest caz sistemul admite o infinitate de soluții de forma

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{10 - 2k}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}). \text{ Sistemul este nedeterminat.}$$

Așadar, dacă $m \neq \frac{3}{2}$ sistemul are o singură soluție, iar dacă $m = \frac{3}{2}$ sistemul este nedeterminat (admite o infinitate de soluții de forma

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{10 - 2k}{3}, \text{ unde } k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4. Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x - y = 2 \\ mx - (3m - 4)y = 8. \end{cases}$$

Aflînd pe x și y din primele două ecuații obținem $x = 1$ și $y = 2$ și înlocuind în ecuația a treia avem:

$$m + 2(3m - 4) = 8, \text{ de unde } m = \frac{16}{7}.$$

Așadar, dacă $m = \frac{16}{7}$ sistemul are o singură soluție, și anume:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2, \end{cases}$$

iar dacă $m \neq \frac{16}{7}$ sistemul nu are nici o soluție (este *incompatibil*), căci valorile $x = 1$ și $y = 2$, care sînt singurele care verifică primele două ecuații, nu verifică ecuația a treia.

EXERCITII

1. Să se rezolve următoarele ecuații:

$$a) 2x(3x - 2) - 3 \left[1 - (2 - x)(2x + 3) - \frac{x - 3}{2} \right] = 13;$$



$$b) \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{x(x+1)^2} = \frac{5}{2x(x+1)};$$

$$c) \frac{2x+19}{5x^2-5} - \frac{17}{x^2-1} - \frac{3}{1-x} = 0;$$

$$d) \frac{3x-3}{2x^2-2} - \frac{2x+2}{3x^2+6x+3} = \frac{5(x-1)}{12x^2-24x+12};$$

$$e) \frac{6}{4-x} = \frac{25}{1-3x} - \frac{16}{x-4}.$$

2. Să se rezolve considerind pe x ca necunoscută și să se discute următoarele ecuații:

$$a) \frac{x+a}{a-x} + \frac{x-a}{a+x} = \frac{a}{a^2-x^2};$$

$$b) \frac{x}{a} - 1 : \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 1 : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right);$$

$$c) [(n-1)^2 + n] : \left[\frac{(n+1)^3}{3n} - n - 1\right] = x : \left[\frac{(n-1)^2}{4n} + 1\right];$$

$$d) \frac{x}{a}(3ab+1) = \frac{3ab}{1+a} + \frac{(2a+1)x}{a(a+1)^2} + \frac{a^2}{(a+1)^3};$$

$$e) \frac{am}{a^2-b^2} - \frac{x+m}{a+b} = \frac{b^2x}{a^3-ab^2+a^2b-b^3} - \frac{ax}{a^2+2ab+b^2};$$

$$f) \frac{2}{a^2-ac-ax+cx} + \frac{1}{x^2-ax-cx+ac} = \frac{1}{c^2-cx-ac+ax};$$

$$g) \frac{a^3-1}{a^3+1} = \frac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x};$$

$$h) \frac{kx-lx}{2k+2l} + \frac{k lx}{k^2-l^2} - \frac{k-x}{k-l} = \frac{x}{2} + \frac{k+x}{k+l}.$$

3. Să se rezolve următoarele ecuații considerind pe rînd, ca necunoscută, fiecare din literele care intervin:

$$a) \frac{3a+k}{k} - 5 = \frac{b}{k};$$

$$b) ax + bx = c;$$

$$c) m \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1;$$

$$d) a - \frac{a+b}{x} = b - \frac{a-b}{x};$$

$$e) \frac{an+by}{n+y} = c.$$

4. Să se rezolve sistemele de ecuații considerînd ca necunoscute literele care intervin:

a)
$$\begin{cases} \frac{7x-3y}{5} = \frac{5x-y}{3} - \frac{x+y}{2}; \\ 3(x-1) = 5(y+1) \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(y + \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{5} (x+2) = 1,1 \\ x - 2y + 4 = \frac{1}{4} \left[2x + 3 \left(y - \frac{1}{2} \right) \right]; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{1}{2} - y = \frac{1}{3} \left\{ \left[x - 5(y - 0,3) \right] - 3 \right\} + 1,2; \\ 3 \left[1 - \frac{2 - 3(x-y)}{5} \right] + 6,94 = 2(3x-1) \end{cases}$$

d)
$$1 - \frac{x+5y}{7} = 4x - 3y - 80 = \frac{1}{21} [2 - 2(x-7) - y];$$

e)
$$\frac{x+2y-7}{1} = \frac{2y-x+15}{2} = \frac{2x+y+19}{3};$$

f)
$$\frac{3x+y-3}{6} = \frac{4x-2y+1}{3} = \frac{5x-3y+8}{5};$$

g)
$$\begin{cases} b - 5[15 - (3 - a)] = 11 - 8[7(3a - 5) + 3b] \\ 41(3a + 2b) = 4\{5[22 - 3(5 - 2a)] - 13b\} \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} \frac{3}{2a+b} + \frac{7}{a-b} = 1,9 \\ \frac{5}{a-b} - \frac{2}{2a+b} = 1,15; \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} \frac{11}{2r-3s} + \frac{18}{3r-2s} = 13 \\ \frac{27}{3r-2s} - \frac{2}{2r-3s} = 1. \end{cases}$$

5. Să se rezolve sistemele următoare, considerînd pe x și y ca necunoscute:

a)
$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \\ \frac{x}{3m} + \frac{y}{6n} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{lx+1}{k+y} = 1 \\ \frac{x+y}{x-y} = \frac{k+l}{k-l} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{m-1}{n-1} = \frac{m(1-x)}{n(1-y)}; \\ mx = ny \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \\ x - y = 4ab \end{cases}$$

Handwritten solutions for problem 5a and 5b:

For 5a:
$$\begin{aligned} & \begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases} \\ & \begin{aligned} & \text{Add: } (a+b)x = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow x = \frac{2(a^2 + b^2)}{a+b} \\ & \text{Subtract: } (a-b)y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

For 5b:
$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \\ \frac{x}{3m} + \frac{y}{6n} = \frac{2}{3} \end{cases} \\ & \begin{aligned} & \text{Multiply second eq by 2: } \frac{x}{3m} + \frac{y}{3n} = \frac{4}{3} \\ & \text{Subtract from first eq: } \frac{2x}{3m} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{m}{2} \\ & \text{Substitute: } \frac{m}{2n} + \frac{y}{n} = 1 \Rightarrow y = \frac{n}{2} \end{aligned} \end{aligned}$$

6. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații cu trei sau mai multe necunoscute (x, y, z, u, v, t) .

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 17 \\ 3x - 4y - 6z = -14; \\ 8x - 7y + 2z = 17 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = -\frac{9}{4} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}; \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{y} - \frac{2}{z} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{6}{x+z} + \frac{5}{x+3y} = 2 \\ \frac{15}{x+z} - \frac{4}{z-2y} = \frac{1}{2} \\ \frac{10}{x+3y} - \frac{7}{z-2y} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x - y + 2z - 3u = 0 \\ 3x - y + z - 2u = 0 \\ x - 2y + 3z - u = 5; \\ 2x - 3y + z - u = -5 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 3x - y + u = 2 \\ x + 3y - z = 1 \\ y + 3z - u = 4 \\ x - z - 3u + 11 = 0 \end{cases}$$

RELAȚIA DE ORDINE ÎN MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Fiind date două numere reale x și y , dacă există un număr real α pozitiv astfel încît $y = x + \alpha$, spunem că x este mai mic decît y și scriem $x < y$. În loc să spunem că x este mai mic ca y , vom spune că y este mai mare ca x și vom scrie $y > x$.

Afirmația „ $x < y$ sau $x = y$ ” se va scrie: „ $x \leq y$ ”.

Un număr real x este pozitiv atunci și numai atunci cînd $x > 0$.

Un număr real x este negativ atunci și numai atunci cînd $x < 0$.

Relația $\leq$ are următoarele proprietăți:

Notăm cu x, y, z numere reale arbitrare.

O_1 . Oricare ar fi numerele reale x și y este adevărată cel puțin una dintre propozițiile:

$$a) x < y, \quad b) x = y, \quad c) y < x.$$

$$O_2. (x \leq y \text{ și } y \leq z) \Rightarrow x \leq z \text{ (Tranzitivitatea).}$$

$$O_3. (x \leq y \text{ și } y \leq x) \Rightarrow x = y \text{ (Antisimetria).}$$

Orice relație care are proprietăți analoge cu O_1 , O_2 și O_3 se numește *relație de ordine* (totală).

O propoziție în care intervine o singură dată semnul $<$, sau $\leq$, sau $>$, sau $\geq$, se numește *inegalitate*.

Relația de ordine în corpul numerelor reale are, în plus, următoarele proprietăți:

O_4 . $x \leq y \Leftrightarrow x + a \leq y + a$. Această proprietate se va exprima astfel: *dacă adunăm în ambii membri ai unei inegalități același număr real, se obține o inegalitate echivalentă cu prima și de același sens.*

Exemple:

$$1. 3x \leq 4 \Leftrightarrow 3x + 3 \leq 4 + 3 \Leftrightarrow 3x + 3 \leq 7.$$

$$2. 7x \leq 5 \Leftrightarrow 7x + (-5) \leq 5 + (-5) \Leftrightarrow 7x - 5 \leq 0.$$

Consecință. $x \leq y + a \Leftrightarrow x - a \leq y$.

Într-adevăr, această echivalență se deduce adunând în ambii membri ai inegalității $x \leq y + a$ numărul real $-a$.

Proprietatea $x \leq y + a \Leftrightarrow x - a \leq y$ se exprimă astfel:

dacă trecem un termen dintr-un membru al unei inegalități în celălalt membru, schimbându-i semnul, obținem o inegalitate echivalentă cu prima și de același sens cu aceasta.

Exemplu:

$$3x + 4 \leq 2x - 3 \Leftrightarrow 3x - 2x \leq -4 - 3 \Leftrightarrow x \leq -7$$

(am trecut pe $2x$ din membrul drept în membrul stâng și pe 4 din membrul stâng în membrul drept).

$$O_5 \cdot a) (x \leq y \text{ și } a > 0) \Leftrightarrow (ax \leq ay \text{ și } a > 0);$$

$$b) (x \leq y \text{ și } a < 0) \Leftrightarrow (ax \geq ay \text{ și } a < 0).$$

Proprietatea O_5 se exprimă astfel:

a) *Dacă înmulțim ambii membri ai unei inegalități cu un număr real pozitiv obținem o inegalitate echivalentă cu cea inițială, de același sens.*

b) *Dacă înmulțim ambii membri ai unei inegalități cu un număr real negativ obținem o inegalitate echivalentă cu cea inițială, dar de sens contrar cu aceasta.*

Exemplu:

$$4x \leq 7 \Leftrightarrow 8x \leq 14 \quad (\text{am înmulțit cu } 2 > 0).$$

Folosind proprietatea O_6 eliminăm numitorii într-o inegalitate:

Exemplu:

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}y - 3 \Leftrightarrow 3x - 4 \leq 4y - 36 \quad (\text{am înmulțit cu numitorul comun } 12).$$

Înmulțind cu -1 ambii membri ai unei inegalități obținem o inegalitate echivalentă cu cea inițială de sens contrar cu aceasta și având toți termenii cu semn schimbat.

Exemplu:

$$-3x - 8 \leq -2x - 6 \Leftrightarrow 3x + 8 \geq 2x + 6.$$

Împărțind o ecuație cu un număr real pozitiv (ceea ce înseamnă înmulțirea cu inversul acestuia) obținem o inegalitate echivalentă cu cea inițială și de același sens.

Exemplu:

$$4x + 8 \leq 10x \Leftrightarrow 2x + 4 \leq 5x \quad (\text{am împărțit cu } 2).$$

Observație. Proprietățile O_4 și O_5 , inclusiv consecința proprietății O_4 , rămân adevărate dacă înlocuim relația $\leq$ cu oricare dintre relațiile $<$, $\geq$, $>$.

Notății și denumiri

Fie două numere reale a și b , astfel încât $a < b$.

a) În loc de „ $x < b$ și $x > a$ ” se scrie $a < x < b$.

Mulțimea numerelor reale x care au proprietatea $a < x < b$ se numește *interval deschis* de extremități a și b și se notează cu semnul (a, b) .

Avem: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

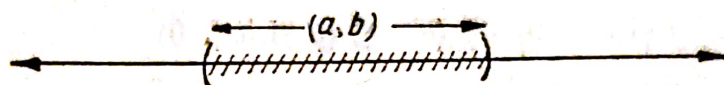


Fig. 4.

b) În loc de „ $x \leq b$ și $x \geq a$ ” scriem $a \leq x \leq b$.

Mulțimea numerelor reale x care au proprietatea $a \leq x \leq b$ se numește *interval închis* de extremități a și b și se notează cu semnul $[a, b]$.

Avem $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

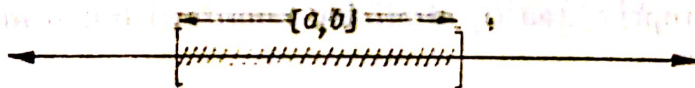


Fig. 5.

c) În loc de „ $x \leq b$ și $x > a$ ” scriem $a < x \leq b$.

Mulțimea numerelor reale x care au proprietatea $a < x \leq b$ se numește *interval deschis la stînga și închis la dreapta*, de extremități a și b și se notează cu semnul $(a, b]$.

Avem $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

Analog se introduce noțiunea de interval închis la stînga și deschis la dreapta, care se notează cu semnul $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

d) Mulțimea numerelor reale x care au proprietatea $x \geq a$ (respectiv $x > a$) se numește *interval închis* (respectiv *deschis*) *la stînga și nemărginit la dreapta* și se notează cu semnul $[a, +\infty)$ (respectiv $(a, +\infty)$).

Avem: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.

În particular, $R_+ = \{x \in R \mid x > 0\} = (0, +\infty)$.

e) Mulțimea numerelor reale x care au proprietatea $x \leq a$ (respectiv $x < a$) se numește *interval închis* (respectiv deschis) *la dreapta și nemărginit la stînga* și se notează cu semnul $(-\infty, a]$ (respectiv $(-\infty, a)$).

Avem: $(-\infty, a] = \{x \in R \mid x \leq a\}$;

$(-\infty, a) = \{x \in R \mid x < a\}$.

În particular, $R_- = \{x \in R \mid x < 0\} = (-\infty, 0)$.

În loc de notația R pentru mulțimea numerelor reale se mai folosește notația $(-\infty, +\infty)$.

INECUAȚIA DE GRADUL ÎNTII CU O NECUNOSCUTĂ

Se numește *inecuație de gradul întâi cu o necunoscută* x orice propoziție echivalentă cu o propoziție de forma: $ax \leq b$, sau $ax < b$, sau $ax \geq b$ sau $ax > b$, unde a și b sînt constante și $a \neq 0$. A rezolva inecuația $ax \leq b$ înseamnă a afla numerele reale x astfel încît propoziția $ax \leq b$ să fie adevărată.

Pentru rezolvarea acestor inecuații vom considera două cazuri:

a) $a > 0$. În acest caz înmulțind cu $\frac{1}{a} > 0$, obținem o inecuație echivalentă și de același sens. Avem:

$$ax \leq b \Leftrightarrow x \leq \frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{b}{a}\right].$$

Rezolvare analogă în cazurile: $ax < b$, $ax \geq b$, $ax > b$.

Exemplu:

$3x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{7}{3}\right)$. Așadar, propoziția $3x < 7$ este adevărată dacă

$x < \frac{7}{3}$, ceea ce înseamnă $x \in \left(-\infty, \frac{7}{3}\right)$.

Așadar, $\{x \in R \mid 3x < 7\} = \left(-\infty, \frac{7}{3}\right)$.

b) $a < 0$. În acest caz înmulțind cu $\frac{1}{a} < 0$ obținem o inecuație echivalentă și de sens contrar.

Avem:

$$ax \leq b \Leftrightarrow x \geq \frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{b}{a}, +\infty\right).$$

Exemplu:

$$-2x < 5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

Așadar propoziția $-2x < 5$ este adevărată dacă $x > -\frac{5}{2}$, ceea ce înseamnă $x \in \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

$$\text{Așadar, } \{x \in \mathbb{R} \mid -2x < 5\} = \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

Cind inecuația de gradul întâi nu se prezintă sub forma menționată mai înainte, pentru rezolvare trecem prin următoarele etape:

1) Desfacem parantezele (dacă există).
2) Eliminăm numitorii (dacă există fracții) înmulțind cu numitorul comun al tuturor numitorilor (ales astfel ca să fie pozitiv). În cazul cind necunoscuta se află la numitor nu se elimină numitorii decit dacă avem certitudinea că aceștia sînt pozitivi.

3). Trecem toți termenii care conțin necunoscuta în membrul stîng și ceilalți termeni în membrul drept și după reduceri aducem inecuația la forma studiată mai înainte.

Exemplu:

$$\begin{aligned} \frac{2(3x+5)}{3} - \frac{3}{2} < \frac{5x+3}{2} - 1 &\Leftrightarrow \frac{2}{3} \frac{6x+10}{3} - \frac{3}{2} < \frac{5x+3}{2} - 1 \Leftrightarrow 12x + 20 - \\ - 9 < 15x + 9 - 6 &\Leftrightarrow 12x - 15x < 9 - 6 + 9 - 20 \Leftrightarrow -3x < -8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x > \frac{8}{3} &\Leftrightarrow x \in \left(\frac{8}{3}, \infty\right). \end{aligned}$$

EXERCITII

Să se rezolve inecuațiile:

1. $\frac{x-3}{4} + \frac{2-3x}{2} \geq 5$. 2. $(2x-3)5 + 3(x-4) > 2x - \frac{1}{2}$.

3. $(x-1)2 - \frac{1}{2}(x-3) \leq \frac{1}{3}(x-1)$. 4. $\frac{(x-2)3}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2x-3}{6} < 0$.

5. $(x-1)(2x+3) \leq (2x-5)(x+4)$.

6. Să se afle valorile lui x pentru care expresiile:

$$\frac{3}{8}x - 4, \quad \frac{x+1}{2} - 2x + 2\frac{1}{2}, \quad \frac{5-x}{8} + \frac{3-2x}{4}$$

sînt pozitive.

7. Să se afle valorile lui x pentru care expresiile:

$$x + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}, \quad 2 + \frac{3x - 5}{2} - \frac{2x - 1}{3}$$

sint negative.

8. Să se rezolve sistemele de inecuații simultane:

$$\begin{cases} 2x > 4x + 6 \\ 4x + 3 < 2x + 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x - 3) < 6 \\ 3\frac{x}{8} - 7 > \frac{x}{12}. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2 > x - 2 \\ x + 15 > 6 - 2x \\ x - 14 < 5x + 14. \end{cases}$$

9. Să se afle valorile lui x pentru care fracțiile $\frac{2x - 3}{3x - 2}$, $\frac{3x + 8}{5 - x}$, $\frac{2 - 3x}{2x + 7}$ sint pozitive.

Handwritten notes and calculations:

1. $5, 6, 8$

2. $5, 6, 8$

3. $15, 18, 24$

CAPITOLUL V

PUTERI CU EXPONENT RAȚIONAL

1. EXPRESII ALGEBRICE IRAȚIONALE

Expresia algebrică care conține operația de extragere de rădăcină (radical) se numește *irațională* în raport cu variabilele respective. Exemple de expresii algebrice iraționale:

$$\sqrt{a^2 - 3}; \quad \sqrt[3]{x + \sqrt{y}}; \quad \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

În general, noi considerăm o expresie după aspectul ei exterior și de aceea este posibil ca o expresie să fie numai aparent irațională. Așa, de exemplu, expresia $\sqrt{(x^2 + 1)^2} - 1$ dată sub formă irațională este identică cu expresia rațională x^2 .

2. PUTERI NATURALE

Fie a un număr real și n un număr natural; vom scrie:

$$a^1 = a \text{ și } a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ ori}}, \text{ dacă } n > 1.$$

Numărul a^n se numește *putere*: numărul a se numește *baza* puterii, iar numărul n se numește *exponentul* puterii. Avem: $1^n = 1$ și $0^n = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Dacă $a^n = 0$, atunci $a = 0$; dacă $a \geq 0$, atunci $a^n \geq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Puterile cu exponent natural se numesc *puteri naturale*.

Proprietățile puterilor naturale sînt următoarele:

- 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$ și $m > n$); 3) $(a^n)^m = a^{nm}$;
- 4) $(ab)^n = a^n b^n$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$).

Aceste proprietăți se verifică direct, plecând de la definiția puterii. Puterea a^n ($a \in R$ și $n \in N$) este un număr unic și bine determinat.

Dacă avem două numere pozitive x și y date, este evident că pentru orice număr natural n rezultă:

- dacă $x < y$, atunci și $x^n < y^n$;
 (1) dacă $x > y$, atunci și $x^n > y^n$;
 dacă $x = y$, atunci și $x^n = y^n$.

Într-adevăr, dacă:

- $3 < 4$, atunci $3^2 < 4^2$;
 $5 > 3$, atunci $5^3 > 3^3$ ș.a.m.d.

Aceste cazuri care se exclud reciproc epuizează toate formele posibile ale relației de comparare a două numere pozitive x și y . Din relațiile (1) deducem:

- dacă $x^n < y^n$, atunci $x < y$;
 (2) dacă $x^n > y^n$, atunci $x > y$;
 dacă $x^n = y^n$, atunci $x = y$.

Relațiile de la (2) se demonstrează prin metoda reducerii la absurd. Să demonstrăm, de exemplu, relația:

Dacă $x^n = y^n$, atunci $x = y$.

Presupunem că $x \neq y$. Atunci sau $x > y$ sau $x < y$. În ambele cazuri conform relațiilor (1) urmează ca $x^n > y^n$ sau $x^n < y^n$, ceea ce este contrar, ipotezei.

Deci, dacă $x^n = y^n$, atunci și $x = y$. Așadar, în ipoteza $x > 0$ și $y > 0$, avem $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$.

În mod asemănător se demonstrează și relațiile celelalte.

Observație. Relațiile (1) și (2) nu sînt adevărate decît dacă x și y sînt numere pozitive. E x e m p l e:

$$4 > -5, \text{ dar } 4^2 < (-5)^2; 16 < 25;$$

$$-3 < -1, \text{ dar } (-3)^2 > (-1)^2; 9 > 1;$$

la fel:

$$(-8)^2 > (2)^2, \text{ dar } -8 < 2; -8 < 2;$$

$$(-4)^2 < (-6)^2, \text{ dar } -4 > -6.$$

Pe baza celor de la (1) și (2) rezultă un procedeu care permite să se stabilească o serie de proprietăți ale radicalilor prin verificare directă, și anume:

Pentru a demonstra, între două numere pozitive x și y , egalitatea $x = y$ sau una din inegalitățile $x < y$, $x > y$, este suficient să se stabilească relația corespunzătoare între x^n și y^n .

3. DEFINIȚIA RADICALULUI

Fiind dat un număr pozitiv A și un număr natural $n \geq 2$, numim radical de ordin n al numărului A un alt număr pozitiv, pe care îl notăm cu simbolul $\sqrt[n]{A}$ * și care ridicat la puterea n reproduce numărul A .

Deci, conform acestei definiții avem:

$$(1) (\sqrt[n]{A})^n = A,$$

unde:

$$A \geq 0 \text{ și } \sqrt[n]{A} \geq 0,$$

sau dacă notăm numărul pozitiv $\sqrt[n]{A}$ cu a , adică:

$$(2) \sqrt[n]{A} = a,$$

(3) $a^n = A$ deoarece din (1) și (2) rezultă $(\sqrt[n]{A})^n = a^n = A$, unde $A \geq 0$ și $a \geq 0$, adică din egalitatea (2) rezultă (3), și reciproc, dacă A și a sînt numere pozitive.

Consecință. Dacă $a > 0$, atunci conform definiției avem:

$$(4) \sqrt[n]{a^n} = a,$$

pentru că a , ridicat la puterea n , dă cantitatea de sub radical, a^n .

Relațiile (1) și (4) arată că:

Ridicarea la puterea n și extragerea radicalului (rădăcinii) de ordin n sînt operații inverse, care aplicate succesiv unui număr pozitiv se neutralizează, adică reproduc acel număr, oricare ar fi ordinea de succesiune a acestor operații.

Exemple:

$$(\sqrt[5]{7})^5 = 7; (\sqrt{a})^2 = a. \quad (a \geq 0)$$

$$\sqrt[6]{3^6} = 3; \sqrt[4]{4^4} = 4.$$

Cele două operații inverse — ridicarea la puterea n și extragerea rădăcinii de ordinul n —, date de relațiile:

$$(\sqrt[n]{A})^n = A \text{ și } \sqrt[n]{a^n} = a,$$

sînt valabile numai pentru $A \geq 0$ și $a \geq 0$, adică putem suprima radicalul și exponentul numai cînd A și a sînt pozitive.

De exemplu:

$(\sqrt{5})^2 = 5$ sau $\sqrt{5^2} = 5$ (am suprimat radicalul și exponentul) și în general:

$$\sqrt[n]{x^n} = x, \text{ dacă } x \text{ este pozitiv,}$$

* Semnul $\sqrt[n]{}$ se numește radical, A este expresia de sub radical, iar numărul natural n se numește ordinul radicalului sau indicele radicalului. Simbolul $\sqrt[n]{A}$ se mai citește și rădăcina de ordinul n a numărului A . Cînd $n = 2$, $\sqrt[n]{}$ se scrie numai $\sqrt{}$ (fără indice) și se citește: rădăcină de ordinul doi sau rădăcină pătrată sau radical indice doi.

dar este greșit:

$$\sqrt{(-5)^2} = -5;$$

$$\sqrt{25} = 5$$

calculat corect este:

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{+25} = +5.$$

Cum putem proceda totuși ca să apară numărul (-5) de sub radical?
Observăm că $+5$ se poate scrie $-(-5)$.

Adică:

$$\sqrt{(-5)^2} = -(-5).$$

La fel procedăm când în locul lui -5 figurează un număr negativ oarecare B :

$$\sqrt{B^2} = -B.$$

Semnul minus are rolul de a transforma numărul negativ B , într-un număr pozitiv.

Prin urmare:

$$\sqrt{A^2} = \begin{cases} A & \text{dacă } A \geq 0 \\ -A & \text{dacă } A < 0 \end{cases}$$

Relația de mai sus se poate scrie mai simplu cu ajutorul modulului.

Reamintim că modulul unui număr A este un număr pozitiv notat cu semnul $|A|$ și care este egal cu A dacă A este pozitiv, este egal cu 0 dacă $A = 0$ și este egal cu opusul lui A dacă $A < 0$, adică:

$$|A| = \begin{cases} A & \text{dacă } A > 0, \\ 0 & \text{dacă } A = 0, \\ -A & \text{dacă } A < 0, \end{cases} \quad \text{sau } |A| = \begin{cases} A, & \text{dacă } A \geq 0, \\ -A, & \text{dacă } A < 0 \end{cases}$$

Deci, putem scrie:

$$\sqrt{A^2} = |A|.$$

Exemple:

$$\sqrt{5^2} = |5| = 5$$

$$\sqrt{(-4)^2} = |-4| = -(-4) = 4$$

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = -(-3) = 3$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x-y)^2} = |x-y| = \begin{cases} x-y & \text{dacă } x \geq y \\ -(x-y) & \text{dacă } x < y \end{cases}$$

$$\sqrt{(2x-3)^2} = |2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{dacă } x \geq \frac{3}{2}, \\ -2x+3 & \text{dacă } x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Observație. Se întâlnește uneori scrierea următoare:

$$\sqrt[n]{A^2} = \pm A.$$

În această egalitate însă nu putem lua ambele semne. Când $A > 0$, trebuie luat semnul *plus* și nu se poate lua semnul *minus*, iar când $A < 0$ trebuie luat semnul *minus* și nu se poate lua semnul *plus*.

Simbolul $\sqrt[n]{A^2}$ (conform definiției) trebuie să fie un număr pozitiv, unic și bine determinat.

Cele arătate pentru radicalii de indice doi sînt, în general, valabile pentru radicalii de indice par oarecare.

Exemple:

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = -(-2) = 2$$

$$\sqrt[6]{(a-b)^6} = |a-b| = \begin{cases} a-b & \text{dacă } a \geq b \\ -(a-b) & \text{dacă } a < b \end{cases}$$

În general, pentru $k \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$$

Este interesant de arătat la ce greșeală poate duce aplicarea formulei $\sqrt[n]{A^2} = A$ fără condiția $A > 0$.

Să luăm expresiile egale:

$$\sqrt{(5-6)^2} = \sqrt{(6-5)^2}.$$

Suprimînd exponentul cu indicele radicalului, obținem:

$$5-6 = 6-5,$$

adică:

$$-1 = 1,$$

ceea ce este evident greșit. Greșeala se datorează aplicării formulei $\sqrt[n]{A^2} = A$ fără condiția $A > 0$.

Corect, trebuia să se folosească modulul, astfel:

$$\begin{aligned} |5-6| &= |6-5| \\ |-1| &= |1| \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Vom vedea, mai departe, la scoaterea unui factor de sub radical și la calculul valorilor numerice ale unei expresii iraționale, importanța aplicării corecte a caracterului invers al operațiilor de ridicare la putere și de extragere a rădăcinii.

4. PROPRIETĂȚI ALE RADICALILOR

Teorema I. Valoarea unui radical nu se schimbă dacă înmulțim, prin același număr natural, indicele radicalului și exponentul expresiei de sub radical. Această operație se numește *amplificarea radicalului*.

Astfel: $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n^p]{A^p}$.

Demonstrația se face prin verificare. Ridicăm fiecare radical la puterea np :

$$(\sqrt[n]{A})^{np} = [(\sqrt[n]{A})^n]^p = A^p \text{ (după regula de ridicare la putere)}$$

și:

$$(\sqrt[n^p]{A^p})^{np} = A^p \text{ (după definiția radicalului).}$$

Deci:

$$\boxed{\sqrt[n]{A} = \sqrt[n^p]{A^p}} \quad (1)$$

Exemplu:

Să se arate că $\sqrt[5]{A^3}$ este egal cu $\sqrt[25]{A^{15}}$, obținut prin înmulțirea indicelui și a exponentului cu 5.

Ridicăm fiecare radical la puterea 25:

$$(\sqrt[5]{A^3})^{25} = [(\sqrt[5]{A^3})^5]^5 = (A^3)^5 = A^{15},$$

$$(\sqrt[25]{A^{15}})^{25} = A^{15}.$$

$$\text{Deci: } \sqrt[5]{A^3} = \sqrt[25]{A^{15}}.$$

Teorema II. Valoarea unui radical nu se schimbă dacă împărțim prin același număr natural k indicele radicalului și exponentul de sub radical.

Trebuie demonstrată relația:

$$\sqrt[nk]{A^k} = \sqrt[n]{A}.$$

Demonstrația se face prin verificare. Ridicăm fiecare radical la puterea nk :

$$(\sqrt[nk]{A^k})^{nk} = A^k,$$

$$(\sqrt[n]{A})^{nk} = [(\sqrt[n]{A})^n]^k = A^k,$$

deci:

$$\boxed{\sqrt[nk]{A^k} = \sqrt[n]{A}} \quad (2)$$

Relația (2) ne arată că putem împărți indicele și exponentul expresiei de sub radical cu același număr, și valoarea radicalului nu se schimbă. Această operație se numește simplificarea radicalului.

Exemple:

$$\sqrt[8]{3^8} = \sqrt[4]{3^3}; \quad \sqrt[10]{5^5} = \sqrt{5}; \quad \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}};$$

$$\sqrt[12]{(2+x)^4} = \sqrt[3]{2+x}; \quad \sqrt[h]{x^{ph}} = x^p \quad (x > 0).$$

Observație. Simplificarea între indicele radicalului și exponentul expresiei de sub radical nu se aplică fără anumite precauțiuni în cazul când indicele este par și $A < 0$, deoarece se ajunge la expresii fără sens sau la rezultate false. Astfel, $\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt[4]{81} = 3$. Aplicând simplificarea, obținem: $\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt{-9}$, care nu are sens (radicalul s-a definit pentru numere pozitive). La fel, $\sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = 3$. Aplicând simplificarea, obținem: $\sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[3]{-27} = -3$, rezultat fals.

Greșeala constă în aceea că, prin simplificare, expresiile de sub radicali, care erau pozitive $(-9)^2$ și $(-27)^2$, au devenit negative (-9) și (-27) . Greșeala care apare, în acest caz, prin simplificare, se poate înlătura dacă se folosește *modulul*, astfel:

$$\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt[4]{|-9|^2} = \sqrt{|-9|} = 3;$$

$$\sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{|-27|^2} = \sqrt[3]{|-27|} = 3.$$

În general, dacă indicele este par și sub radical o variabilă x despre care nu s-a specificat că este pozitivă, simplificăm folosind *modulul*, astfel:

$$\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{|x|^2} = \sqrt{|x|}; \quad \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{|x|^2} = \sqrt[3]{|x|}.$$

5. ADUCEREA RADICALILOR LA ACELAȘI INDICE

Mai mulți radicali cu indici diferiți pot fi aduși la același indice folosind proprietatea de amplificarea radicalilor (operație analogă aducerii fracțiilor la același numitor). Este indicat ca indicele comun să fie c.m.m.m.c. al indicilor radicalilor dați.

Exemple:

Să se aducă la același indice radicalii:

$$1) \sqrt[4]{a}; \quad \sqrt[3]{b}; \quad \sqrt[5]{c} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

C.m.m.m.c. al radicalilor 4, 3, 5 este 60, care se ia ca indice comun al radicalilor. Avem:

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt[60]{a^{15}}; \quad \sqrt[3]{b} = \sqrt[60]{b^{20}}; \quad \sqrt[5]{c} = \sqrt[60]{c^{12}}.$$

Prin urmare, radicalii de la început se pot înlocui prin egalii lor:

$$\sqrt[60]{a^{15}}; \quad \sqrt[60]{b^{20}}; \quad \sqrt[60]{c^{12}},$$

care au același indice.

$$2) \sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{b}; \sqrt[n]{c} \quad (a>0, b>0, c>0).$$

C.m.m.m.c. al indicilor este 12. Avem:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[12]{a^2}; \quad \sqrt[n]{b} = \sqrt[12]{b^4}; \quad \sqrt[n]{c} = \sqrt[12]{c^3}.$$

Radicalii dați pot fi înlocuiți prin egalii lor:

$$\sqrt[12]{a^2}; \quad \sqrt[12]{b^4}; \quad \sqrt[12]{c^3},$$

care au același indice.

Teorema III. Rădăcina unui produs este egală cu produsul rădăcinilor de același ordin al factorilor, cu condiția ca fiecare factor să aibă sens.

Avem de demonstrat relația:

$$\sqrt[n]{A \cdot B \cdot C} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C} \quad (A>0, B>0, C>0, n \in \mathbb{N}).$$

Demonstrația se face prin verificare. Ridicăm fiecare radical la puterea n :

$$(\sqrt[n]{A \cdot B \cdot C})^n = A \cdot B \cdot C.$$

$$(\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C})^n = (\sqrt[n]{A})^n \cdot (\sqrt[n]{B})^n \cdot (\sqrt[n]{C})^n = A \cdot B \cdot C,$$

deci:

$$\boxed{\sqrt[n]{A \cdot B \cdot C} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C}} \quad (1)$$

În general:

$$\sqrt[n]{A \cdot B \cdot C \dots L} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C} \dots \sqrt[n]{L}, \quad (2)$$

unde:

$$A, B, C, \dots L > 0.$$

Relația (2) se poate scrie:

$$\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C} \dots \sqrt[n]{L} = \sqrt[n]{A \cdot B \cdot C \dots L}, \quad (3)$$

unde

$$A, B, C, \dots L > 0.$$

Interpretînd relația (3), putem enunța:

Regulă. Produsul mai multor radicali de același ordin este egal cu radicalul de același ordin din produsul expresiilor de sub radical. Adică

$$\boxed{\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C} = \sqrt[n]{A \cdot B \cdot C}}$$

Exemple:

1) Să se efectueze $\sqrt[6]{a^6 b^{12} c^{18} x^{24}}$ și $\sqrt{x^2 y^4 z^8}$.

Avem:

$$\sqrt[6]{a^6 b^{12} c^{18} x^{24}} = \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{b^{12}} \cdot \sqrt[6]{c^{18}} \cdot \sqrt[6]{x^{24}} = ab^2 c^3 x^4;$$

$$\sqrt{x^2 y^4 z^8} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^4} \cdot \sqrt{z^8} = xy^2 z^4.$$

2) Să se efectueze produsul:

$$\sqrt[5]{xy} \cdot \sqrt[5]{yz^2} \cdot \sqrt[5]{xz}.$$

Avem:

$$\sqrt[5]{xy} \cdot \sqrt[5]{yz^2} \cdot \sqrt[5]{xz} = \sqrt[5]{xy \cdot yz^2 \cdot xz} = \sqrt[5]{x^2 y^2 z^3}.$$

Observații. 1° În enunțul proprietății III s-a precizat că, pentru a extrage rădăcina dintr-un produs, extragem rădăcina de același ordin din fiecare factor, *cu condiția ca fiecare factor să aibă sens*. Aceasta deoarece nu putem extrage rădăcina dintr-un produs, extrăgând rădăcina din fiecare factor, în cazul când unii factori sînt negativi și indicele radicalului este par. Astfel, în exemplul:

$$\sqrt{16 \cdot (-4) \cdot (-9)}$$

nu putem aplica proprietatea de mai sus, deși radicalul are sens, pentru că produsul de sub radical este pozitiv.

În acest caz trebuie să efectuăm operațiile de sub radical și apoi extragem rădăcina:

$$\sqrt{16 \cdot (-4) \cdot (-9)} = \sqrt{16 \cdot 36} = +24.$$

Procedînd altfel, s-ar obține rezultate false sau lipsite de sens.

2° Uneori, cînd sub radical este o *sumă* sau o *diferență* de pătrate, se aplică *greșit* proprietatea III, care se referă numai la *produse*.

Astfel, este *greșit* să se scrie:

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7,$$

deoarece $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

La fel este *greșit* să se scrie:

$$\sqrt{100 - 64} = \sqrt{100} - \sqrt{64} = 10 - 8 = 2,$$

deoarece $\sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$.

Deci, rădăcina unei sume sau diferențe nu este egală cu suma sau diferența rădăcilor termenilor sumei sau diferenței.

Adică:

$$\sqrt{A + B} \neq \sqrt{A} + \sqrt{B},$$

$$\sqrt{A - B} \neq \sqrt{A} - \sqrt{B}.$$

3) Să se efectueze produsul:

$$\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^3} \quad (a > 0).$$

Pentru a putea efectua produsul, radicalii trebuie să aibă același indice; deci îi aducem la același indice și apoi facem produsul. Obținem:

$$\sqrt[12]{a^{30}} \cdot \sqrt[12]{a^{16}} \cdot \sqrt[12]{a^9} = \sqrt[12]{a^{30 \cdot a^{16} \cdot a^9}} = \sqrt[12]{a^{55}}.$$

$$\sqrt[12]{a^{55}}$$

Teorema IV. Rădăcina unui cît este egală cu cîtul rădăcinilor de același ordin din numărător și numitor.

Trebuie demonstrată relația:

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} \quad (A > 0, B > 0, n \in \mathbb{N}).$$

Demonstrația se face prin verificare. Ridicăm fiecare radical la puterea n :

$$\left(\sqrt[n]{\frac{A}{B}}\right)^n = \frac{A}{B}; \quad \left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{A})^n}{(\sqrt[n]{B})^n} = \frac{A}{B}.$$

Deci:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}} \quad (1)$$

Relația (1) mai poate fi scrisă:

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}} \quad (2)$$

Interpretind relația (2), putem enunța:

Regulă. Cîtul a două rădăcini de același ordin este egal cu rădăcina de acel ordin din cîtul expresiilor de sub radicali.

Exemple:

$$1) \sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}; \quad \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}.$$

$$2) \sqrt[4]{\frac{a^8}{b^{16}}} = \frac{\sqrt[4]{a^8}}{\sqrt[4]{b^{16}}} = \frac{a^2}{b^4}; \quad \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{y^{4n}}} = \frac{\sqrt[n]{x^{2n}}}{\sqrt[n]{y^{4n}}} = \frac{x^2}{y^4}.$$

$$3) \sqrt{3 : 0,25} = \sqrt{3 : 0,25} = \sqrt{\frac{300}{25}} = \sqrt{12}.$$

$$4) \sqrt[5]{a^{19}} : \sqrt[5]{a^9} = \sqrt[5]{a^{19} : a^9} = \sqrt[5]{a^{10}} = a^2.$$

Dacă radicalii nu au același indice, îi aducem la același indice și apoi efectuăm împărțirea:

Exemple:

$$\sqrt[5]{x^3} : \sqrt[7]{x^3} = \sqrt[35]{x^{21}} : \sqrt[35]{x^{15}} = \sqrt[35]{x^{21} : x^{15}} = \sqrt[35]{x^6};$$

$$\sqrt[5]{a^3bc^3} : \sqrt[10]{a^3bc^3} = \sqrt[10]{a^6b^2c^6} : \sqrt[10]{a^3bc^3} = \sqrt[10]{a^6b^2c^6 : a^3bc^3} = \sqrt[10]{a^3bc^3}.$$

Observație. Proprietatea $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ nu o putem aplica în cazul când termenii sînt negativi și indicele par. Astfel, în exemplul:

$$\sqrt[\text{par}]{\frac{-9}{-4}}$$

nu putem aplica proprietatea de mai sus, deși radicalul are sens, deoarece cîntul de sub radical este pozitiv.

În acest caz, trebuie să efectuăm împărțirea; apoi extragem radicalul:

$$\sqrt[\text{par}]{\frac{-9}{-4}} = \sqrt[2]{2,25} = 1,5 \text{ sau}$$

$$\sqrt[\text{par}]{\frac{-9}{-4}} = \sqrt[\frac{\text{par}}{2}]{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt[\text{par}]{9}}{\sqrt[\frac{\text{par}}{2}]{4}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Teorema V. Pentru ridicarea unui radical la o putere este suficient să se ridice la aceea putere expresia de sub radical.

Trebuie demonstrată relația:

$$(\sqrt[n]{A})^k = \sqrt[n]{A^k} \quad (A > 0; n, k \in \mathbb{N}).$$

Această relație se poate demonstra prin verificare, ridicînd la puterea n fiecare radical și, de asemenea, pe baza regulii de înmulțire a radicalilor care au același indice, pentru că:

$$(\sqrt[n]{A})^k = \underbrace{\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{A} \cdot \dots \sqrt[n]{A}}_{k \text{ factori}} = \sqrt[n]{\underbrace{A \cdot A \cdot \dots A}_{k \text{ factori}}} = \sqrt[n]{A^k}.$$

Deci:

$$\boxed{(\sqrt[n]{A})^k = \sqrt[n]{A^k}} \quad (1)$$

Consecință. Scriind relația (1) de la dreapta spre stînga:

$$\sqrt[n]{A^k} = (\sqrt[n]{A})^k, \text{ rezultă:} \quad (2)$$

Se observă că, dacă se ridică la o putere un radical, se poate extrage din nou radicalul și se obține același rezultat. De exemplu: $\sqrt[4]{16} = 2$, iar $\sqrt[4]{2^4} = 2$.

Regulă. Pentru a extrage rădăcina din puterea k a unui număr A , este suficient să se ridice la puterea k rădăcina lui A .

Exemple:

$$\begin{aligned}(\sqrt[5]{x^3})^3 &= \sqrt[5]{(x^3)^3} = \sqrt[5]{x^9}, \\(\sqrt[5]{x^2 y^3 z^4})^{15} &= \sqrt[5]{(x^2 y^3 z^4)^{15}} = (x^2 y^3 z^4)^3 = x^6 y^9 z^{12}, \\ \sqrt[3]{8^5} &= (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32; \\ \sqrt[7]{128^6} &= (\sqrt[7]{128})^6 = 2^6 = 64; \\ \sqrt{9^5} &= (\sqrt{9})^5 = 3^5 = 243; \\ \left(\sqrt[6]{\frac{5x+2}{3x}}\right)^3 &= \sqrt[6]{\left(\frac{5x+2}{3x}\right)^3} = \sqrt{\frac{5x+2}{3x}} \quad (x > 0).\end{aligned}$$

Teorema VI. La extragerea rădăcinii dintr-un radical, indicii rădăcinilor se înmulțesc, iar expresia de sub radical se lasă neschimbată.

Trebuie demonstrată relația:

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{A}} = \sqrt[nk]{A} \quad (A > 0; n, k \in \mathbb{N}).$$

Demonstrația se face prin verificare. Ridicăm fiecare radical la puterea nk :

$$(\sqrt[n]{\sqrt[k]{A}})^{nk} = [(\sqrt[k]{A})^n]^k = (\sqrt[k]{A})^k = A; \quad (\sqrt[nk]{A})^{nk} = A.$$

Deci:

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{A}} = \sqrt[nk]{A}} \quad (1)$$

Exemple:

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^7}} = \sqrt[15]{x^7}; \quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{u^6}}} = \sqrt[30]{u^6} = \sqrt[5]{u}; \quad \sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}; \quad \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}} = \sqrt[12]{3}.$$

6. SCOATEREA UNUI FACTOR RAȚIONAL DE SUB RADICAL

Dacă a și b sint numere pozitive, avem:

$$\boxed{\sqrt[a]{a^n b} = a \sqrt[a]{b}} \quad (1)$$

14.01.1969

Într-adevăr:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^n b} &= \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = & (\text{rădăcina unui produs} \\ &= a \sqrt[n]{b} & \text{este egală cu produsul} \\ & & \text{rădăcinilor}).\end{aligned}$$

Relația (1) ne spune că *putem scoate un factor de sub radical extrăgând rădăcina din acel factor și scriind rezultatul ca factor în fața radicalului.*

Exemple:

$$\sqrt[3]{a^6 bc} = \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{bc} = a^2 \sqrt[3]{bc};$$

$$\sqrt[4]{ab^8} = \sqrt[4]{b^8} \cdot \sqrt[4]{a} = b^2 \sqrt[4]{a} (a > 0, b > 0).$$

Observație. În calcule este necesar uneori să exprimăm mai simplu rădăcina unei expresii care nu se extrage exact, dar poate fi pusă sub forma unui produs de factori. În acest caz procedăm astfel:

$$\sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x};$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = 10 \sqrt{2};$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2 \sqrt[3]{3}.$$

La scoaterea unui factor de sub un radical de ordin par trebuie să avem în vedere cele arătate referitor la caracterul invers al operațiilor de ridicare la putere și extragere de rădăcină, care intervin în calcule.

Exemple:

$$\sqrt{(-2)^2 \cdot 3} = \sqrt{(-2)^2} \cdot \sqrt{3} = |-2| \sqrt{3} = 2 \sqrt{3}.$$

Cînd avem de scos un factor literal, despre care nu s-a specificat că este pozitiv, îl scoatem în afara radicalului în modul, astfel:

$$\text{pentru rădăcina pătrată } \sqrt{ax^2} = |x| \sqrt{a} = \begin{cases} x \sqrt{a} & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x \sqrt{a} & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

și, în general,

$$\sqrt[2h]{ax^{2h}} = |x| \sqrt[2h]{a} = \begin{cases} x \sqrt[2h]{a} & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x \sqrt[2h]{a} & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Exemple:

$$\sqrt[n]{b^n} = |b| = \begin{cases} b & \text{dacă } b \geq 0 \\ -b & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| \sqrt[6]{3^6} = -(-2) \sqrt[6]{3} = 2 \sqrt[6]{3}$$

$$\sqrt{(x-1)^2(x^2+9)} = |x-1| \sqrt{x^2+9} = \begin{cases} (x-1) \sqrt{x^2+9} & \text{dacă } x \geq 1 \\ -(x-1) \sqrt{x^2+9} & \text{dacă } x < 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^6y} = |x^3| \sqrt{y} = \begin{cases} x^3 \sqrt{y} & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x^3 \sqrt{y} & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{2(x-y)^4} = |x-y| \sqrt[4]{2} = \begin{cases} (x-y) \sqrt[4]{2} & \text{dacă } x \geq y \\ -(x-y) \sqrt[4]{2} & \text{dacă } x < y \end{cases}$$

7. INTRODUCEREA UNUI FACTOR SUB RADICAL

Relația (1) $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$,

scrisă de la dreapta la stânga:

$$\boxed{a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}} \quad (2)$$

ne arată că pentru a înmulți un radical cu un număr pozitiv, înmulțim expresia de sub radical cu acel număr ridicat la o putere egală cu indicele radicalului.

Putem deci scrie:

$$5 \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{5^4 a}; \quad a^3 \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a^9 x}; \quad b^2 \sqrt[4]{\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt[4]{\frac{b^8 x^2}{y^2}}.$$

În cazul când se cere să înmulțim radicalul cu un număr negativ, putem introduce sub radical numai valoarea absolută a acelui număr, ridicată la o putere egală cu indicele radicalului, lăsând semnul — în fața radicalului.

Astfel:

$$-7 \sqrt{3} = - \sqrt{7^2 \cdot 3} = - \sqrt{147}.$$

Este greșit să scriem:

$$-7 \sqrt{3} = \sqrt{(-7)^2 \cdot 3} = \sqrt{147}.$$

În general, pentru un factor x despre care nu s-a specificat că este pozitiv, avem:

$$x \sqrt[n]{a} = \begin{cases} \sqrt[n]{ax^n} & \text{dacă } x > 0 \\ -\sqrt[n]{ax^n} & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

adică semnul factorului x rămâne, în fiecare caz, în fața radicalului. Această relație este valabilă pentru orice radical care are indicele par.

Aceleași observații sînt valabile la relația:

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}}}$$

valabilă cînd $b > 0$.

Dacă x este o variabilă despre care nu s-a specificat că este pozitivă, avem:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{a}{x^n}} & \text{dacă } x > 0 \\ -\sqrt[n]{\frac{a}{x^n}} & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

relație valabilă pentru orice radical care are indicele par.

8. ELIMINAREA RADICALULUI DE LA NUMITOR

S-a stabilit relația:

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} \quad (A > 0, \quad B > 0),$$

la care uneori avem nevoie ca numitorul să nu fie sub radical sau, ceea ce este același lucru, să eliminăm radicalul de la numitor.

Astfel, avem:

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \sqrt[n]{\frac{xy}{y^n}} = \frac{\sqrt[n]{xy}}{y} \quad (x > 0, \quad y > 0);$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \sqrt[n]{\frac{xy^n}{y^n}} = \frac{\sqrt[n]{xy^n}}{y}; \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \sqrt[n]{\frac{xy^n}{y^n}} = \frac{\sqrt[n]{xy^n}}{y}.$$

În general:

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y^{n-1}}}{y} = \frac{\sqrt[n]{xy^{n-1}}}{y}.$$

Observăm că pentru a elimina radicalul de la numitorul unei fracții, amplificăm fracția cu o putere a numitorului, astfel încât să se poată extrage rădăcina exact din numitor.

Exemple:

$$\sqrt[3]{\frac{7}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{7x}{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{7x}}{x}; \quad \sqrt[3]{\frac{4}{x^8}} = \sqrt[3]{\frac{4x}{x^9}} = \frac{\sqrt[3]{4x}}{x^3}; \quad \sqrt[5]{\frac{3}{x^2y^3}} = \sqrt[5]{\frac{3x^3y^2}{x^5y^5}} = \frac{\sqrt[5]{3x^3y^2}}{xy};$$

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} = \frac{a\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a+b}} = \frac{a\sqrt{a+b}}{a+b} \quad (a+b > 0);$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{\sqrt[3]{a-b}} &= \frac{(a^2 - b^2) \sqrt[3]{(a-b)^2}}{\sqrt[3]{a-b} \sqrt[3]{(a-b)^2}} = \frac{(a-b)(a+b) \sqrt[3]{(a-b)^2}}{a-b} = \\ &= (a+b) \sqrt[3]{(a-b)^2} \quad a \neq b. \end{aligned}$$

9. EXTRAGEREA RĂDĂCINII DIN NUMERE NEGATIVE

În algebră se lucrează cu mulțimea numerelor reale (pozitive și negative).

În definiția dată radicalului s-a specificat că se admite extragerea rădăcinii numai din numere pozitive și s-au stabilit reguli de operații numai cu astfel de radicali.

Să cercetăm dacă nu putem extinde extragerea rădăcinii în mulțimea numerelor reale.

1) Să considerăm rădăcina pătrată dintr-un număr negativ.

Astfel, $\sqrt{-16}$ nu se poate defini, deoarece nici un număr real (pozitiv sau negativ), prin ridicare la pătrat, nu dă -16 .

Spunem că *extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr negativ nu are sens*.

La fel, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[8]{-3}$ n-au sens, deoarece nu se poate găsi un număr real x astfel ca să avem:

$$x^4 = -2 \text{ și } x^8 = -3.$$

În general, $\sqrt[2k]{-A}$ ($A > 0$) nu are sens, adică rădăcinile de ordin par dintr-un număr negativ n-au sens în mulțimea numerelor reale. De aceea, în mulțimea numerelor reale nici nu ne punem problema studiului unor asemenea radicali și cu atât mai puțin a aplicării proprietăților stabilite.

2) Să definim rădăcini de ordin impar dintr-un număr negativ.

Vol. serie:

$$\sqrt[3]{-1} = -1, \text{ deoarece } (-1)^3 = -1;$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ deoarece } (-2)^3 = -8;$$

$$\sqrt[5]{-1} = -1, \text{ deoarece } (-1)^5 = -1;$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2, \text{ deoarece } (-2)^5 = -32.$$

Cum $\sqrt[3]{8} = 2$ și $\sqrt[3]{-8} = -2$, putem scrie:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

Constatăm că radicalii de ordin impar din numerele negative se pot defini.

Pentru a cuprinde în studiu și acești radicali, trebuie să completăm definiția radicalilor astfel:

Fiind dat un număr negativ $-A (A > 0)$ și un număr natural impar $m = 2n + 1$, numim radical de ordin m al numărului $-A$ un alt număr (real), pe care îl notăm cu simbolul $\sqrt[m]{-A}$ și care ridicat la puterea m reproduce numărul $-A$.

Din definiție rezultă că $\sqrt[m]{-A}$, pentru m impar, este un număr negativ, pentru că numai un număr negativ ridicat la o putere fără soț poate da numărul negativ $-A$.

Avem deci:

$$(\sqrt[m]{-A})^m = -A, \text{ când } m \text{ este impar,}$$

adică:

$$\boxed{(\sqrt[2n+1]{-A})^{2n+1} = -A} \quad (1)$$

și mai avem

$$\boxed{\sqrt[2n+1]{-A} = -\sqrt[2n+1]{A}} \quad (2)$$

Deci orice radical de ordin impar dintr-un număr negativ se poate totdeauna transforma într-un radical dintr-un număr pozitiv și după această transformare se pot aplica toate teoremele referitoare la radicalii din numere pozitive.

Observații. 1) Proprietatea de extragere a rădăcinii dintr-un radical nu se poate aplica dacă unul dintre indici este par, deoarece în acest caz expresia nu are sens.

Exemplu:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{-8}} = \sqrt[4]{-\sqrt[3]{8}} \text{ nu are sens în mulțimea numerelor reale.}$$

Putem însă aplica proprietatea dacă indicii sînt impari.

Exemplu:

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{-4}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{-4}} = -\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} = -\sqrt[15]{4}.$$

2) Amplificarea radicalului cu un număr par se poate face numai după ce s-a scos semnul minus în fața radicalului, altfel se ajunge la rezultate false.

Exemplu:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[6]{8^2} = -\sqrt[6]{2^6} = -2, \text{ rezultat corect.}$$

Dar este greșit:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{2^6} = +2.$$

Dacă se amplifică cu un număr impar se poate aplica direct proprietatea.

Exemplu:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[9]{(-8)^3} = \sqrt[9]{-2^9} = -2.$$

Toate celelalte proprietăți se pot aplica și radicalilor de ordin impar din numere negative, fără nici o restricție.

pinaoia

10. RADICALI ASEMENEA

16.01.1969.

Radicali asemenea se numesc radicalii care au aceeași expresie sub radical și același indice.

Exemple:

$$5a \sqrt[3]{xy}; \quad -b \sqrt[3]{xy}; \quad 2 \sqrt[3]{xy}.$$

Pentru a putea stabili dacă anumiți radicali sînt asemenea, trebuie să-i aducem la forma cea mai simplă. Pentru aceasta folosim transformările: scoaterea factorilor de sub radical, simplificarea radicalilor și eliminarea radicalilor de la numitor.

Exemple:

Să se stabilească dacă următorii radicali sînt asemenea:

$$1) \sqrt[3]{48}; \sqrt[3]{384}; \sqrt[3]{750},$$

avem:

$$\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{8 \cdot 6} = 2 \sqrt[3]{6};$$

$$\sqrt[3]{384} = \sqrt[3]{64 \cdot 6} = 4 \sqrt[3]{6};$$

$$\sqrt[3]{750} = \sqrt[3]{125 \cdot 6} = 5 \sqrt[3]{6}.$$

Radicalii sînt asemenea.

$$2) \sqrt[6]{64 x^2 y^6}; \sqrt[12]{4096 x^4 y^{24}}; \sqrt[6]{729 x^2 y^6},$$

avem:

$$\sqrt[6]{64 x^2 y^6} = 2y \sqrt[6]{x^2} = 2y \sqrt[3]{x};$$

$$\sqrt[12]{4096 x^4 y^{24}} = 2y^2 \sqrt[12]{x^4} = 2y^2 \sqrt[3]{x};$$

$$\sqrt[6]{729 x^2 y^6} = 3y \sqrt[6]{x^2} = 3y \sqrt[3]{x}.$$

Radicalii sînt asemenea, avînd același indice și aceeași expresie sub radical.

$$3) \sqrt{\frac{2a}{5}}; \sqrt[4]{\frac{100}{a^2}}; \sqrt{90a},$$

$$\sqrt{\frac{2a}{5}} = \sqrt{\frac{10a}{25}} = \frac{\sqrt{10a}}{5} = \frac{1}{5} \sqrt{10a};$$

$$\sqrt[4]{\frac{100}{a^2}} = \sqrt{\frac{10}{a}} = \sqrt{\frac{10a}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{10a};$$

$$\sqrt{90a} = \sqrt{9 \cdot 10a} = 3 \sqrt{10a}.$$

Radicalii sînt asemenea.

Reducerea radicalilor asemenea este operația prin care înlocuim o sumă algebrică de radicali asemenea printr-un singur radical.

Exemple:

$$3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

Operațiile cu expresiile iraționale se efectuează pe baza regulilor generale de calcul algebrice și a regulilor operațiilor cu radicali.

11. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA EXPRESIILOR IRAȚIONALE

Să se efectueze:

$$1) 2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50} = 2\sqrt{2^3 \cdot 2} + 5\sqrt{6^2 \cdot 2} - 7\sqrt{3^2 \cdot 2} - \sqrt{5^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2} + 30\sqrt{2} - 21\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

$$2) 8\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{8}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2^2 \cdot 3} + 4\sqrt{3^2 \cdot 3} - \frac{2}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} + 12\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = \left(4 - 1 + 12 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} = \frac{29}{2}\sqrt{3}.$$

$$3) 2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{\frac{3}{5}} = 2\sqrt{\frac{15}{3^2}} + \sqrt{4 \cdot 15} - \sqrt{\frac{15}{5^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{15} + 2\sqrt{15} - \frac{1}{5}\sqrt{15} = \left(\frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{5}\right)\sqrt{15} = \frac{37}{15}\sqrt{15}.$$

$$4) \sqrt{9a^2 + 9b^2} - \sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{16a^2 + 16b^2} - \sqrt{49a^2 + 49b^2} + \sqrt{4a^2 - 8ab + 4b^2} = \sqrt{9(a^2 + b^2)} - \sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{16(a^2 + b^2)} - \sqrt{49(a^2 + b^2)} + \sqrt{4(a-b)^2} = 3\sqrt{a^2 + b^2} - |a-b| + 4\sqrt{a^2 + b^2} - 7\sqrt{a^2 + b^2} + 2|a-b| = |a-b| = \begin{cases} a-b & \text{dacă } a \geq b \\ -(a-b) & \text{dacă } a < b \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ \hline 72 \end{array}$$

pămoz aici

12. ÎNMULȚIREA EXPRESIILOR IRAȚIONALE

La înmulțirea expresiilor iraționale procedăm ca la înmulțirea expresiilor raționale, ținând seama de calculul prescurtat, descompunerea în factori și calculul cu radicali.

Exemple:

$$1) (3\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{27}) \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{50} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{27} \cdot \sqrt{2}.$$

$$\cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{16} + \sqrt{36} + \sqrt{100} - 2\sqrt{54} = 12 + 6 + 10 - 6\sqrt{6} = 28 - 6\sqrt{6}.$$

2) $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})$; observăm că avem un produs de sumă prin diferență și obținem:

$$(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2 = 6 - 3 = 3.$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 28 \\ \hline 10 \\ 8 \\ \hline 18 \end{array}$$

3) $(\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{2})$; observăm că, printr-o grupare convenabilă, putem pune în evidență un produs de sumă prin diferență, astfel:

$$[(\sqrt{7} + \sqrt{5}) - \sqrt{2}][(\sqrt{7} + \sqrt{5}) + \sqrt{2}] = (\sqrt{7} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 7 + 2\sqrt{35} + 5 - 2 = 10 + 2\sqrt{35}.$$

$$4) (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x-1})^2 = x - (x-1) = x - x + 1 = 1.$$

5) $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5})$; observăm că acest produs conduce la suma a două cuburi, astfel:

$$[(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5} + (\sqrt[3]{5})^2](\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}) = (\sqrt[3]{2})^3 + (\sqrt[3]{5})^3 = 2 + 5 = 7.$$

$$6) \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{(a+b)^2 - (2\sqrt{ab})^2} = \\ = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab} = \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \\ = \begin{cases} a-b & \text{dacă } a \geq b \\ -(a-b) & \text{dacă } a < b \end{cases}.$$

13. ÎMPĂRȚIREA EXPRESIILOR IRAȚIONALE

La împărțirea expresiilor iraționale procedăm ca la împărțirea expresiilor raționale, ținând seama de calculul prescurtat, descompunerea în factori și calculul cu radicali.

Exemple:

$$1) \sqrt{360} : \sqrt{60} = \sqrt{360 : 60} = \sqrt{6}.$$

$$2) \sqrt[4]{9a^3} : \sqrt[4]{\frac{a}{9}} = \sqrt[4]{9a^3 : \frac{a}{9}} = \sqrt[4]{9a^3 \cdot \frac{9}{a}} = \sqrt[4]{81a^2} = 3\sqrt{a}.$$

$$3) (15\sqrt{50} + 5\sqrt{200} - 3\sqrt{450}) : \sqrt{10} = 15\sqrt{\frac{50}{10}} + 5\sqrt{\frac{200}{10}} - 3\sqrt{\frac{450}{10}} = \\ = 15\sqrt{5} + 5\sqrt{20} - 3\sqrt{45} = 15\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 9\sqrt{5} = 16\sqrt{5}.$$

$$4) \sqrt[4]{a^2b - 2ab^2 + b^3} : \sqrt[4]{\frac{b}{a^2 - 2ab + b^2}} = \sqrt[4]{\frac{b(a^2 - 2ab + b^2)}{a^2 - 2ab + b^2}} = \sqrt[4]{\frac{b(a^2 - 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2)}{b(a^2 - 2ab + b^2)}} = \sqrt[4]{(a-b)^4} = |a-b| = \\ = \begin{cases} a-b & \text{dacă } a > b \\ -(a-b) & \text{dacă } a < b \end{cases}$$

5) $(\sqrt[3]{4x^2} - \sqrt[3]{9y^2}) : (\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{3y})$; descompunem în factori diferența de pătrate și apoi simplificăm:

$$\frac{(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{3y})(\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{3y})}{\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{3y}} = \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{3y}.$$

6) $(2\sqrt[3]{54} - 3\sqrt{2}) : \sqrt[3]{2}$ avem:

$$\begin{aligned} 2\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} - 3\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} &= 2\sqrt[3]{54 : 2} - 3\sqrt[6]{2^3 : 2^2} = \\ &= 2\sqrt[3]{27} - 3\sqrt[6]{2} = 6 - 3\sqrt[6]{2}. \end{aligned}$$

7) $(4\sqrt[6]{x^5} + 6\sqrt[4]{x^3} - 8\sqrt[3]{x^2}) : 2\sqrt{x} \cdot (x > 0)$; aducem radicalii la același indice:

$$(4\sqrt[12]{x^{10}} + 6\sqrt[12]{x^9} - 8\sqrt[12]{x^8}) : 2\sqrt[12]{x^6} = 2\sqrt[12]{x^4} + 3\sqrt[12]{x^3} - 4\sqrt[12]{x^2};$$

simplificăm radicalii și obținem:

$$2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x} - 4\sqrt[6]{x}.$$

14. RIDICAREA LA PUTERE A EXPRESIILOR IRAȚIONALE

Această operație se face ținând seama de regulile ridicării la o putere a expresiilor raționale și de calculul cu radicali.

Exemple:

1) $(2 + \sqrt{3})^2$; aplicăm regula de ridicare la pătrat a unui binom:

$$4 + 2\sqrt{3} + 3 = 7 + 2\sqrt{3}.$$

2) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}.$

3) $(x + \sqrt{y})^3$; aplicăm regula de ridicare la cub a unui binom:

$$x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3x(\sqrt{y})^2 + \sqrt{y}^3 = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y} = x^3 + 3xy + (3x^2 + y)\sqrt{y}.$$

4) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^3 = \sqrt{5^3} - 3(\sqrt{5})^2\sqrt{2} + 3\sqrt{5}(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2^3} =$

$$= 5\sqrt{5} - 15\sqrt{2} + 6\sqrt{5} - 2\sqrt{2} = 11\sqrt{5} - 17\sqrt{2}.$$

5) $(\sqrt{8} + \sqrt{6} + \sqrt{2})^2$; aplicăm regula de ridicare a unui polinom la pătrat și avem:

$$8 + 6 + 2 + 2\sqrt{48} + 2\sqrt{16} + 2\sqrt{12} = 8 + 6 + 2 + 8\sqrt{3} + 8 + 4\sqrt{3} = 24 + 12\sqrt{3}.$$

6) Să se demonstreze egalitatea:

$$\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

În acest caz se folosește ridicarea la putere, care este indicată de ordinul rădăcinii. Se ridică la pătrat fiecare membru al egalității și se arată că pătratele celor doi membri sînt egale.

Avem:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}})^2 &= 2(2 + \sqrt{2}) - 2\sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \\ &+ 2 - \sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \sqrt{4 - 2} + 2 - \sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \sqrt{2} + 2 - \\ &- \sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} - 4 + 2 - \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}; \quad (\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2 = 2 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Pătratele celor doi membri sînt egale, deci egalitatea este adevărată.

7) Să se afle o formă mai simplă a expresiei:

$$\sqrt{\frac{3 + \sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{2}}{2}}.$$

Se notează $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{2}}{2}} = u$ și prin ridicare la pătrat se află u^2 , apoi u , astfel:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{3 + \sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{2}}{2}} \right)^2 &= \frac{3 + \sqrt{2}}{2} - 2 \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})}{4}} + \frac{3 - \sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2}}{2} - \sqrt{9 - 2} = 3 - \sqrt{7} = u^2; \\ u &= \sqrt{3 - \sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Deci:

$$\sqrt{\frac{3 + \sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3 - \sqrt{7}}.$$

15. DESCOMPUNEREA EXPRESIILOR IRAȚIONALE ÎN FACTORI ȘI SIMPLIFICAREA FRAȚIILOR CARE CONȚIN EXPRESII IRAȚIONALE

Expresiile iraționale se pot descompune în factori ca și expresiile raționale, prin aceleași procedee: factor comun, gruparea termenilor, diferență de pătrate etc., ținînd seama de calculul cu radicali.

Exemple:

Să se descompună în factori expresiile folosind:

a) Factorul comun și formulele de calcul prescurtat:

1) $\sqrt{21} + \sqrt{14}$; se dă $\sqrt{7}$ factor comun:

$$\sqrt{21} + \sqrt{14} = \sqrt{7}(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

$$2) \sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{y} - 1).$$

$$3) 5 + \sqrt{5}; \text{ exprimăm pe 5 sub formă de radical: } 5 = \sqrt{5^2}.$$

$$\sqrt{5^2} + \sqrt{5} = \sqrt{5}(\sqrt{5} + 1).$$

$$4) a + \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}).$$

$$5) \sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{a^2 - b^2} (|a| > |b|); \text{ avem:}$$

$$\sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{(a+b)(a-b)} = (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})\sqrt{a+b}.$$

$$6) \sqrt{a^3 + b^3} + \sqrt{a^2 - b^2} (a > b > 0) \text{ avem:}$$

$$\sqrt{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} + \sqrt{(a+b)(a-b)} = \sqrt{a+b}(\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a-b}).$$

$$7) x - y - \sqrt{x^2 - y^2} (x > y > 0); \text{ scriem: } x - y = \sqrt{(x-y)^2};$$

$$\sqrt{(x-y)^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{(x-y)^2} - \sqrt{(x+y)(x-y)} = \sqrt{x-y}(\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y}).$$

b) Gruparea termenilor:

$$1) \sqrt{ay} + \sqrt{bx} + \sqrt{by} + \sqrt{ax}; \text{ grupăm termenii și scoatem factor comun:}$$

$$\sqrt{a}(\sqrt{y} + \sqrt{x}) + \sqrt{b}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

$$2) ab + b\sqrt{x} + a\sqrt{x} + x = b(a + \sqrt{x}) + \sqrt{x}(a + \sqrt{x}) = (a + \sqrt{x})(b + \sqrt{x}).$$

$$3) 2x + 4\sqrt{2x} + 3; \text{ scriem: } \sqrt{(2x)^2} + \sqrt{2x} + 3\sqrt{2x} + 3 \text{ și avem:}$$

$$2x + 4\sqrt{2x} + 3 = \sqrt{2x}(\sqrt{2x} + 1) + 3(\sqrt{2x} + 1) = (\sqrt{2x} + 1)(\sqrt{2x} + 3).$$

c) Restrângerea de pătrate pe baza formulelor:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \text{ și } a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2.$$

$$1) \sqrt{x^2} - 2\sqrt{xy} + \sqrt{y^2} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2.$$

$$2) x^2 + 2x\sqrt{y} + y = (x + \sqrt{y})^2.$$

$$3) y^2 + x + 1 + 2y\sqrt{x} + 2y + 2\sqrt{x}; \text{ observăm că este dezvoltarea unui trinom la pătrat: } (y + \sqrt{x} + 1)^2.$$

$$4) a^2 - 2a\sqrt{b} + b + 2a - 2\sqrt{b} = (a^2 - 2a\sqrt{b} + b) + (2a - 2\sqrt{b}) = (a - \sqrt{b})^2 + 2(a - \sqrt{b}) = (a - \sqrt{b})(a - \sqrt{b} + 2).$$

Simplificarea fracțiilor care conțin radicali se face la fel ca la fracțiile raționale, după ce s-au descompus în factori expresiile de la numărător și de la numitor.

Exemple:

Să se simplifice fracțiile:

$$1) \frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a^2} + \sqrt{ab}}{\sqrt{b^2} + \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

$$2) \frac{a + b + \sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} + 1} = \frac{\sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} + 1} = \frac{\sqrt{a+b}(\sqrt{a+b} + 1)}{(\sqrt{a+b} + 1)} = \sqrt{a+b}.$$

$$3) \frac{x + 3\sqrt{x} + \sqrt{x} + 3}{x + 6\sqrt{x} + 9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 3(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}^2 + 6\sqrt{x} + 9} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)^2} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3}$$

$$4) \frac{x^2 + 2x + 2x\sqrt{y} + y + 2\sqrt{y}}{x^2 - x + x\sqrt{y} - \sqrt{y}} = \frac{(x^2 + 2x\sqrt{y} + y) + (2x + 2\sqrt{y})}{x(x-1) + \sqrt{y}(x-1)} =$$

$$= \frac{(x + \sqrt{y})^2 + 2(x + \sqrt{y})}{(x-1)(x + \sqrt{y})} = \frac{(x + \sqrt{y})(x + \sqrt{y} + 2)}{(x-1)(x + \sqrt{y})} = \frac{x + \sqrt{y} + 2}{x-1}.$$

Observație. Constatăm cu acest prilej că expresiile raționale ireductibile în mulțimea numerelor raționale pot fi descompuse în mulțimea numerelor iraționale.

Exemple:

$a-b$ poate fi privită ca o diferență de pătrate a^2-b^2 în mulțimea numerelor iraționale și avem:

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

$a-b$ poate fi privită ca o diferență de cuburi x^3-y^3 în mulțimea numerelor iraționale și avem:

$$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

$a+b$ poate fi privită ca o sumă de cuburi x^3+y^3 în mulțimea numerelor iraționale și avem:

$$a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

16. EXTRAGEREA RĂDĂCINII DINTR-O EXPRESIE IRAȚIONALĂ

Această operație se face ținând seama de faptul că, dacă radicalul este de ordin par, extragerea rădăcinii are sens numai dacă sub radical cantitatea este pozitivă.

Exemple:

$$1) \sqrt[6]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}; \quad 2) \sqrt[3]{\sqrt[6]{27}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[3]{3}.$$

$$3) \sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt{a^3}} = \sqrt[4]{a^3}.$$

$$4) \sqrt[n]{a \sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{a^n}.$$

$$5) \sqrt[n]{a^3 \sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{3n}}} = \sqrt[n]{a^{3n}} = \sqrt[n]{a^{3n}}.$$

$$6) \sqrt[n]{a \sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[nm]{a^{n+1}}.$$

$$7) \sqrt[30]{\frac{a^5}{a}} \cdot \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[30]{\frac{a^5}{a^{10}}} \cdot \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[30]{a^{-5}} \cdot \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[30]{a^{-5}} \cdot \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[30]{a^{-5} \cdot a^{12}} = \sqrt[30]{a^7} = \sqrt[6]{a^7}.$$

$$8) \sqrt[3]{(a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3)^2}; \text{ restrângem expresia de sub radical și avem:}$$

$$\sqrt[3]{[(a+x)^3]^2} = \sqrt[3]{(a+x)^6} = (a+x)^2 = a+x.$$

$$9) \sqrt{\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{(a+b)^3}{(a+b)^2}}} = \sqrt[6]{a+b}.$$

17. RAȚIONALIZAREA NUMITORILOR UNEI FRAȚII

Cînd la numitorul unei fracții figurează numere iraționale, ele se numesc fracții cu numitori iraționali.

Exemple:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \frac{x}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}; \quad \frac{-y}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}; \quad \frac{5}{\sqrt[3]{4} - \sqrt{3}}.$$

Fracțiile care au la numitor numere raționale sînt fracții cu numitori raționali. În calcule este de multe ori nevoie să se înlocuiască fracțiile cu numitori iraționali, prin fracții egale avînd numitorii raționali.

Operația prin care facem ca numitorul unei fracții să devină rațional o numim *raționalizarea numitorului* acelei fracții.

1. *Raționalizarea numitorului unei fracții cînd la numitor figurează un singur radical.*

Am văzut că putem elimina radicalul de la numitorul unei fracții (cînd este vorba de un singur radical), astfel:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{a}{\sqrt[5]{b}} = \frac{a\sqrt[5]{b^4}}{\sqrt[5]{b} \cdot \sqrt[5]{b^4}} = \frac{a\sqrt[5]{b^4}}{b}$$

și în general:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-1}}}{b} \quad (b > 0).$$

Eliminarea radicalului de la numitor nu este altceva decât raționalizarea numitorului.

2) *Raționalizarea numitorului unei fracții când numitorul este o sumă algebrică de radicali de indice doi.*

EXPRESIE CONJUGATĂ

Definiție. Numim expresie conjugată sau factor conjugat al unei expresii iraționale o altă expresie care nu este identic nulă, astfel încât produsul lor să nu conțină radicali.

De exemplu:

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ are ca factor conjugat pe $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, deoarece

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

La fel:

$x + \sqrt{y}$ are ca factor conjugat pe $x - \sqrt{y}$;

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$ are ca factor conjugat pe $\sqrt{5} + \sqrt{3}$;

$3 + \sqrt{7}$ are ca factor conjugat pe $3 - \sqrt{7}$.

Observăm că expresiile conjugate formate din doi termeni se deosebesc numai prin semnul din fața unor termeni iraționali.

Exemple:

1) Să se raționalizeze numitorul fracției:

$$\frac{2}{3 - \sqrt{2}}.$$

Amplificăm fracția cu expresia conjugată numitorului $3 + \sqrt{2}$ și obținem:

$$\frac{2}{3 - \sqrt{2}} = \frac{2(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{2(3 + \sqrt{2})}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{2(3 + \sqrt{2})}{7}.$$

2) Pentru fracția:

$$\frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{2}},$$

avem:

$$\frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{7 - 2} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{5}.$$

În general, fracția $\frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ devine:

$$\frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}.$$

3) Să se raționalizeze numitorul fracției:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Expresia conjugată numitorului este $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$; avem:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} &= \frac{\sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^2} - \sqrt{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}}{x^2 + 1 - (x^2 - 1)} = \\ &= \frac{x^2 + 1 - \sqrt{x^4 - 1}}{x^2 + 1 - x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - \sqrt{x^4 - 1}}{2}. \end{aligned}$$

4) Să se raționalizeze numitorul fracției:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}},$$

care conține la numitor trei radicali de ordinul doi.

Amplificăm fracția cu $(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - \sqrt{2}$ și obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{[(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}][(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - \sqrt{2}]} &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{15} + 3 - 2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{6 + 2\sqrt{15}}. \end{aligned}$$

Numitorul este tot irațional, dar a devenit mai simplu. Amplificăm fracția obținută cu expresia conjugată numitorului și avem:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{6 + 2\sqrt{15}} &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})(6 - 2\sqrt{15})}{(6 + 2\sqrt{15})(6 - 2\sqrt{15})} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})(6 - 2\sqrt{15})}{36 - 4 \cdot 15} = \\ &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})(6 - 2\sqrt{15})}{-24}. \end{aligned}$$

RAȚIONALIZAREA NUMITORULUI UNEI FRAȚII
CÎND NUMITORUL ESTE O EXPRESIE ALGEBRICĂ
DE RADICALI DE FORMA $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$

Pentru a raționaliza numitorul unei asemenea fracții trebuie, în primul rînd, să determinăm factorul conjugat al expresiilor $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, respectiv $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$.

În egalitățile cunoscute:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3;$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3,$$

înlocuind pe x cu $\sqrt[3]{a}$ și pe y cu $\sqrt[3]{b}$, avem:

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b;$$

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b.$$

Prin urmare,

$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ are ca factor conjugat pe $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$;

$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ are ca factor conjugat pe $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$.

Exemple:

1) Să se raționalizeze numitorul fracției:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}.$$

Amplificăm fracția cu expresia conjugată a numitorului $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$ și avem:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} = \frac{a(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})} = \frac{a(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{x + y}$$

2) Să se raționalizeze numitorul fracției:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}.$$

Amplificăm fracția cu expresia conjugată a numitorului $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$ și avem:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{a(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})} = \frac{a(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{x - y}.$$

18. VALOAREA NUMERICĂ A UNEI EXPRESII ALGEBRICE IRAȚIONALE

Valoarea numerică a unei expresii algebrice iraționale este numărul care se obține când se înlocuiesc literele sau variabilele cu anumite numere reale și se efectuează calculele indicate de semne. Deoarece rădăcinile de ordin par dintr-un număr negativ n-au sens în mulțimea numerelor reale, vom da variabilelor numai valori pentru care radicalii sînt definiți.

În cursul operațiilor n-avem voie să lucrăm decît cu valorile pentru care expresia irațională are sens.

Exemple:

1) $E(x) = \sqrt{x}$.

Indicele fiind par, expresia are sens numai pentru valorile pozitive ale expresiei de sub radical, adică $x \geq 0$.

Într-adevăr, pentru $x < 0$, de exemplu, $x = -2$, avem:

$$E(-2) = \sqrt{-2} \text{ care n-are sens.}$$

Să calculăm cîteva valori numerice ale expresiei date:

$$E(0) = \sqrt{0} = 0; \quad E\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad E(1) = \sqrt{1} = 1; \quad E(3) = \sqrt{3};$$

$$E(4) = \sqrt{4} = 2; \quad E(9) = \sqrt{9} = 3.$$

Formăm tabelul de valori

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	9	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	3	$+\infty$

Variabila x poate lua orice valoare din intervalul $[0, +\infty)$ și evident, pentru o valoare dată lui x , expresiei $E(x)$ îi corespunde o singură valoare pozitivă din același interval $[0, +\infty)$.

2) $E(x) = \sqrt[3]{x}$.

Indicele fiind impar, expresia are sens în mulțimea numerelor reale, adică $x \in (-\infty, +\infty)$ sau $x \in R$.

Să calculăm cîteva valori și să formăm tabelul de valori:

x	$-\infty$	-8	-3	-1	0	1	3	8	$+\infty$
$E(x)$	$-\infty$	-2	$-\sqrt[3]{3}$	-1	0	1	$\sqrt[3]{3}$	2	$+\infty$

Observăm că pentru o anumită valoare dată variabilei x , din intervalul $(-\infty, +\infty)$, îi corespunde expresiei $E(x)$ o singură valoare din același interval $(-\infty, +\infty)$.

3) Fie funcția:

$$E(x) = \sqrt{x^3}.$$

Variabila x , fiind la pătrat, este pozitivă pentru orice valori (pozitive sau negative) din intervalul $(-\infty, +\infty)$, deci expresia de sub radical are sens pentru orice valori din R date variabilei x . Valorile expresiei $E(x)$ sînt însă numai numere pozitive.

Să formăm tabloul de valori:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$E(x)$	$+\infty$	2	1	0	1	2	3	$+\infty$

4) Să se afle valoarea numerică a expresiei:

$$E(x, y) = 2x^2 - 3xy - y^2, \text{ pentru } x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}; \quad y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

Aducem la forma cea mai simplă expresiile lui x și y și avem:

$$x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6};$$

$$y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{3 - 2} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Înlocuind în expresia dată, avem:

$$E = 2(5 + 2\sqrt{6})^2 - 3(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) - (5 - 2\sqrt{6})^2 = 50 + 40\sqrt{6} + 48 - 3 - 25 + 20\sqrt{6} - 24 = 46 + 60\sqrt{6}.$$

5) Să se afle valoarea numerică a expresiei:

$$R(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \text{ pentru } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Înlocuind, avem:

$$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}.$$

Amplificăm fracția de sub radical cu conjugata numitorului:

$$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

6) Să se afle valoarea numerică a expresiei:

$$E(x) = \frac{2b\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \text{ pentru } x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \text{ cu } a > 0, b > 0.$$

Calculăm:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 1} &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a} \right) - 1} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab} \right) - 1} = \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4ab}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}} = \frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

Calculăm:

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) - \frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}} = \frac{(a+b) - |a-b|}{2\sqrt{ab}}.$$

Introducem în expresia dată valorile calculate și avem:

$$E(a, b) = \frac{\frac{2b|a-b|}{2\sqrt{ab}}}{\frac{(a+b) - |a-b|}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b|a-b|}{(a+b) - |a-b|}.$$

$$\text{Dar, } |a-b| = \begin{cases} a-b & \text{dacă } a \geq b \\ b-a & \text{dacă } a < b \end{cases}$$

$$E(a, b) = \frac{2b(a-b)}{a+b-a+b} = \frac{2b(a-b)}{2b} = a-b \text{ dacă } a \geq b;$$

$$E(a, b) = \frac{2b(b-a)}{a+b-b+a} = \frac{2b(b-a)}{2a} = \frac{b}{a}(b-a) \text{ dacă } a < b.$$

Deci:

$$E(a, b) = \begin{cases} a-b & \text{dacă } a \geq b \\ \frac{b}{a}(b-a) & \text{dacă } a < b \end{cases}$$

EXERCITII

Scoaterea factorilor de sub radicali

I. 1) $\sqrt{54}$; $\sqrt{500}$; 2) $\sqrt[3]{11}$; $\sqrt[3]{375000}$; $\sqrt[3]{-108}$; $\sqrt[3]{-384}$.

II. Să se scoată factorii de sub radicali, stabilindu-se condițiile în care operația are sens.

1) $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{x^4}$; $\sqrt{x^5}$; 2) $\sqrt[3]{(m-2n)^3}$; $\sqrt{(x-1)^2}$;

3) $\sqrt{(x^2+y^2)^2}$; $\sqrt{(x-1)^4}$; 4) $(a+2)\sqrt{\frac{2}{(a+2)^2}}$; 5) $\frac{n}{\sqrt{n^3}}$;

$(x-1)^2 \sqrt{(x-1)^4}$

$\frac{a+2\sqrt{2}}{a+2} = \sqrt{2}$

$\frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

6) $\sqrt{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 9)^2}$; 7) $\sqrt[4]{a^2 - 2ax + x^2}$; 8) $\sqrt[4]{[(x^2 + 2)(3 - x)]^4}$.

III. Să se arate în ce condiții următoarele egalități sint adevărate:

acasa. ① $\sqrt{(a - b)^2} = a - b$; ② $\sqrt[3]{(x - 1)^3} = x - 1$; ③ $\sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2$;
 4) $\sqrt[3]{-a^3} = -a$; 5) $\sqrt{x} \sqrt{x} = x$; 6) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$;
 7) $\sqrt[3]{(x + 2)^3} = (x + 2)$; 8) $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2}$;
 9) $\sqrt[4]{x} = \sqrt[8]{x^2}$; 10) $\sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3}$.

IV. Să se arate că:

1) $x + \sqrt{(x - 3)^2} = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dacă } x > 3 \\ 3 & \text{dacă } x \leq 3 \end{cases}$
 2) $x - 2 + \sqrt[4]{(x - 1)^4} = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dacă } x > 1 \\ -1 & \text{dacă } x \leq 1 \end{cases}$
 3) $x - 2 + \sqrt{(x - 2)^2} = \begin{cases} 2(x - 2) & \text{dacă } x > 2 \\ 0 & \text{dacă } x \leq 2 \end{cases}$

Introducerea factorilor sub radicali

1) $3\sqrt{x}$; $2\sqrt{7a}$; $-3\sqrt{5b}$;
 2) $3a^2 \sqrt{\frac{1}{9a^4}}$; $2x \sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}$; $a^2 \sqrt[5]{\frac{1}{a}}$;
 3) $-\frac{a}{b} \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; $-\frac{x}{y} \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}$; $\frac{x}{y} \sqrt{\frac{y}{x}}$;
 4) $\frac{x + y}{x - y} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}}$;
 5) $xy^{n+1} \sqrt{xy^2}$;
 6) $\frac{X}{Y} \sqrt[2n+1]{\frac{Y^{n+2}}{X^{2n}}}$.

Adunarea și scăderea radicalilor

① $2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$; $8\sqrt{a} + 3\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 8\sqrt{a}$; $2\sqrt{x} - 3\sqrt{2x} + 5\sqrt{8x} - 3\sqrt{4x}$.
 ② $7\sqrt{12} - 5\sqrt{27} + 8\sqrt{48} - 6\sqrt{75} + 2\sqrt{108}$; $3\sqrt{8} + 6\sqrt{98} - 5\sqrt{50} - 7\sqrt{72} + 4\sqrt{32}$.



3) $2\sqrt[3]{432} + 3\sqrt[3]{-54} - 6\sqrt[3]{-128} + 5\sqrt[3]{16} + 7\sqrt[3]{-250}.$

4) $4\sqrt[3]{-3} - \sqrt[3]{\frac{8}{9}} + \sqrt[3]{\frac{3}{8}} - \sqrt[3]{7\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{-0,375} + \sqrt[3]{46\frac{7}{8}}.$

5) $\sqrt{\frac{x^8 + x^6}{x-1}} - \sqrt{\frac{9x^6 + 9x^4}{x-1}} + \sqrt{\frac{9x^4 + 9x^2}{x-1}} - \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x-1}} \quad (x > 1).$

6) $3a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - 3x \sqrt{\frac{(a-x)^2}{(a^2-x^2)}} - 2a \sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}} + \frac{4x}{a+x} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{4}} \quad (a > x > 0).$

Înmulțirea radicalilor

Literele și expresiile de sub radicali fiind pozitive, să se calculeze:

1) $2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6}; \sqrt{3} \cdot \sqrt{48}; \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}; 5\sqrt{\frac{1}{4}} \cdot 3\sqrt{\frac{8}{25}}.$

2) $a \cdot \sqrt{\frac{x}{a^2}}; \sqrt{\frac{2a}{3b}} \cdot \sqrt{\frac{2b}{3a}}; \sqrt{\frac{8x}{15y}} \cdot \sqrt{\frac{10xy}{3z^2}}.$

3) $(7\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 3\sqrt{8} + 4\sqrt{20}) \cdot 3\sqrt{2}.$

4) $(2\sqrt{30} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{5});$

$(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(2\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{4}).$

5) $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{a^2 - x^2}}; \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$

6) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a}; \sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{a^4b^5}; \sqrt{a^3b^2} \cdot \sqrt[4]{a^2}; \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}; \sqrt[3]{b^2} \cdot 5\sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt[12]{b}.$

7) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) = (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3$

8) $x \sqrt[6]{7x^3y + 4x^3y\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{x\sqrt{3xy} - 2x\sqrt{xy}} = x^2 \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} \cdot x^2 \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} = x^4 \sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}$

9) $-6 \sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}} \cdot \frac{5}{4} \sqrt{\frac{2bx^2}{a-b}}.$

10) $(\sqrt{a^7} - a^3 + \sqrt{a^5} - a^2 + \sqrt{a^3} - a + \sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1).$

suma 1,5,5,6
20170
milioni

Împărțirea radicalilor

Literele și expresiile de sub radicali fiind pozitive, să se calculeze:

1) $\sqrt[3]{x^5} : \sqrt[3]{x^2}; 4\sqrt{60} : 2\sqrt{5}; a \sqrt[n]{a^{n-1}} : \sqrt[n]{a^2}.$

2) $(10\sqrt{48} - 6\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}; (\sqrt{a^3b} + \sqrt{ab^3} = ab) : \sqrt{ab}.$

3) $\sqrt[5]{x^4} : \sqrt[3]{x^2}; \sqrt[4]{x} : \sqrt[6]{x}; a\sqrt{b} : \sqrt[4]{b}.$

$\sqrt[n]{a^{n+1}} : \sqrt[n]{a^{n+1}}; x \sqrt[n]{x^{n-1}} : \sqrt[n]{x^2}.$

$\frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{x^5}{x^2}} = \sqrt[3]{x^3} = x$

$\frac{4\sqrt{60}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{60}{5}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
 $\frac{4\sqrt{3} \cdot 2}{2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{\frac{3}{5}} = 4\sqrt{\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 5}} = 4\sqrt{\frac{15}{25}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$

- 4) $(6\sqrt{x} + 8x) : 2\sqrt[3]{x}$.
- 5) $\frac{\sqrt[9]{x^2} \cdot \sqrt[12]{x^5}}{\sqrt[18]{x^7}}; \sqrt[10]{\frac{x^3 y}{c^7}}; \sqrt[12]{\frac{x^5 y^{11}}{c^{10}}}$.
- 6) $(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}) : (\sqrt{x} + \sqrt{y})$.
- 7) $(\sqrt[3]{81a^2} - \sqrt[3]{25b^2}) : (\sqrt[3]{9a} - \sqrt[3]{5b})$.
- 8) $(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{4y^4}) : (\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{2y^2})$.

Ridicarea la putere a radicalilor

Literele și expresiile de sub radicali fiind pozitive, să se calculeze:

1) $(\sqrt[4]{a^3})^4; ((\sqrt[4]{2x^3})^5)^4; (-a\sqrt[8]{a^2b^3})^7; (-2a\sqrt[6]{\frac{3}{a^4}})^4; (\sqrt[5]{x-y})^2)^4$.

2) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2; (\frac{1}{2} + 2\sqrt{2})^2; (\sqrt{4} + \sqrt{2})^2$.

3) $(\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{2})^3; (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6})^2; (3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{10})^2$.

4) $(\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}})^2; (\sqrt{11 + 4\sqrt{7}} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}})^2$.

5) Să se demonstreze egalitățile:

a) $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 4; \sqrt{13 + \sqrt{133}} - \sqrt{13 - \sqrt{133}} = \sqrt{14}$;

c) $\sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

6) Să se afle o formă mai simplă a expresiilor:

a) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}; b) \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

Descompunerea expresiilor iraționale în factori și simplificarea fracțiilor

Literele și expresiile de sub radicali se consideră pozitive.

I. Să se descompună în factori:

1) $x - 2 + \sqrt{x - 2}; a - 1 + \sqrt{a - 1}$. 2) $\sqrt{x^2 - 4}; x^2 + 2x\sqrt{y} + y - z^2$.

3) $x + 2\sqrt{xy} + y - a + 2\sqrt{ab} - b; x + 2 - \sqrt[3]{b^2}$.

II. Să se simplifice fracțiile:

1) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{15}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{21} - \sqrt{35}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}; \frac{6 + \sqrt{6}}{\sqrt{6} + 1}; \frac{a + \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

2) $\frac{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}; \frac{ab - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}; \frac{a + b + \sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} + 1}; \frac{\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{ax} - \sqrt[3]{ay}};$
 $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x\sqrt{x-y}\sqrt{y}}.$

3) $\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}; \frac{x-1}{\sqrt{x} + 1}; \frac{a - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt[4]{b}}; \frac{a^2 + a\sqrt{b} - \sqrt{ab} - a}{a + \sqrt{a} + \sqrt{b}}.$

4) $\frac{x + 4\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1}; \frac{a - 4\sqrt{a} + 3}{\sqrt{a} - 1}; \frac{a(x-y) + b\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{a\sqrt{x} + b\sqrt{xy} + a\sqrt{y}}.$

5) $\frac{x^2 + 2x + 2x\sqrt{y} + y + 2\sqrt{y}}{x + \sqrt{y}}.$

Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

6) $\frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}}; 7) \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}; \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}; \frac{1}{\sqrt[3]{7} - 1}.$

8) $\frac{2}{\sqrt[3]{4} - 2}; \frac{4}{3\sqrt[3]{2} - 2}.$

Extragerea rădăcinii dintr-un radical

Literele și expresiile de sub radical fiind pozitive, să se calculeze:

~~1)~~ $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}; \sqrt{a\sqrt{a}\sqrt{a}}; \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}.$

2) $\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}}; \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}}; \sqrt[n-1]{\frac{a}{\sqrt[n]{a}}}.$

3) $\sqrt[m]{x\sqrt[n]{x}\sqrt[p]{x}}; \sqrt{x\sqrt[4]{x^3}}; \sqrt[3]{x}.$

4) $\sqrt[5]{\sqrt{\frac{a^4}{\sqrt[3]{a}}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{a}{\sqrt{a}}}} \cdot \sqrt[30]{\frac{a}{\sqrt{a}}} \cdot \sqrt[5]{a^3}; \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^3}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[3]{a^2}}} \cdot \sqrt[8]{\frac{\sqrt{a^{11}}}{\sqrt{a}}}.$

Raționalizarea numitorilor fracțiilor

Literele și expresiile de sub radicali sînt pozitive:

1) $\frac{a}{\sqrt{a}}; \frac{m}{\sqrt{m^3}}; \frac{a}{\sqrt[3]{a}}; \frac{m+n}{\sqrt{m-n}}; \frac{4}{\sqrt{2}}; \frac{6}{\sqrt[4]{8}}; \frac{\sqrt[6]{49}}{\sqrt[3]{21}}; \frac{a^2-b^2}{\sqrt[3]{a-b}}.$

2) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}; \frac{a}{1 - \sqrt{a}}; \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}.$

$$3) \frac{2}{7-2\sqrt{3}}; \frac{1}{5-3\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{11}+3\sqrt{5}}; \frac{1}{7\sqrt{3}-5\sqrt{2}}.$$

$$4) \frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}; \frac{30}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}; \frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}; \frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}.$$

5) Să se raționalizeze numărătorul expresiei:

$$\frac{\sqrt{n+1}-n}{1}.$$

Aflarea valorii numerice a expresiilor:

$$1) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \text{ pentru } x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \text{ pentru } x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$3) \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}, \text{ pentru } x = \sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}.$$

$$4) \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}, \text{ pentru } x = \frac{2ab}{b^2+1} \text{ și } b > 1.$$

$$5) \frac{(a+x)(x+b) + (a-x)(x-b)}{(a+x)(x+b) - (a-x)(x-b)}, \text{ pentru } x = \sqrt{ab}.$$

$$6) \sqrt{\frac{3-4x}{12}} + \sqrt{2x} - \sqrt{\frac{9-36x}{4}}, \text{ pentru } x = \frac{1}{12}.$$

19. GENERALIZAREA NOȚIUNII DE PUTERE

În matematică se folosește adesea procedeul introducerii de elemente noi (numere sau operații), adoptându-se anumite convenții asupra elementelor nou introduse, astfel încât aceste elemente să se supună regulilor deja existente în teoria respectivă.

În acest capitol ne propunem să extindem, să generalizăm, noțiunea de putere, considerând ca exponent un număr real oarecare. În acest scop, trebuie să adoptăm, prin definiție, anumite convenții, astfel încât să se respecte proprietățile operațiilor cu puteri naturale stabilite.

Reamintim proprietățile, puterilor naturale:

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}; 2) a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0 \text{ și } m > n);$$

$$3) (a^n)^m = a^{nm};$$

$$4) (ab)^n = a^n b^n; 5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$$

1) EXPONENT ZERO

Simbolul a^0 nu are sens deocamdată, deoarece nu are sens să înmulțim numărul a cu el însuși de 0 ori. De aceea, făcând în relația:

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$m = 0, \text{ obținem: } a^0 \cdot a^n = a^n.$$

Dacă $a \neq 0$, atunci singura (unica) valoare posibilă este $a^0 = 1$.

O b s e r v a ț i e: Acest raționament nu constituie o demonstrație a egalității $a^0 = 1$; arată numai cum trebuie definit a^0 pentru ca proprietatea (1) să fie păstrată.

Definiție: Dacă $a \neq 0$, atunci vom conveni să considerăm $a^0 = 1$; sau, orice număr diferit de zero, ridicat la puterea zero, este egal cu 1.

Exemplu:

$$3^0 = 1; \left(\frac{5}{7}\right)^0 = 1; (-3)^0 = 1; (15,14)^0 = 1; (71325)^0 = 1 \text{ etc.}$$

Se verifică direct că și proprietatea (2) este valabilă:

$$(a^0)^n = 1^n = 1 = a^{0 \cdot n};$$

$$(a^m)^0 = 1 = a^{m \cdot 0};$$

$$(a^0)^0 = 1^0 = 1 = a^{0 \cdot 0}.$$

Deci, convenția adoptată prin definiția dată ($a^0 = 1$) se supune regulilor de calcul stabilite.

2) EXPONENTI NEGATIVI

Simbolul a^{-n} nu are sens, deoarece nu are sens să înmulțim numărul a cu el însuși de $-n$ ori. De aceea, dacă în egalitatea:

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

punem $m = -n$, obținem:

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

adică:

$$a^{-n} \cdot a^n = 1,$$

de unde:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ dacă } a \neq 0.$$

Observație: Acest raționament nu constituie o demonstrație a egalității $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; arată numai cum trebuie definit a^{-n} pentru ca proprietatea (1) să fie păstrată.

Definiție: Dacă $a \neq 0$, atunci convenim să considerăm că $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemple:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04; \quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2^2}{3}} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ observăm că } \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

În general avem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \frac{1}{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{b^p}{a^p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p,$$

adică:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p.$$

În baza acestei relații putem scrie:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{1}\right)^3 = 125.$$

Acceptând convențiile anterioare, rezultă că puterile cu exponent 0 sau exponent întreg negativ au aceleași proprietăți ca și puterile cu exponent natural. Adică, oricare ar fi întregii m, n și numărul real a (asupra căruia trebuie pusă condiția $a \neq 0$, ori de câte ori exponentul este ≤ 0), avem:

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad 2) a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0); \quad 3) (a^m)^n = a^{mn};$$

$$4) (ab)^n = a^n b^n; \quad 5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$$

Să arătăm că proprietățile sînt valabile și pentru puterile cu exponenți negativi:

$$1) a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)},$$

$$\text{deci: } a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{(-m)+(-n)},$$

adică: formula $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ se conservă și în cazul exponenților negativi.

Exemplu:

$$a^{-3} \cdot a^{-5} = a^{(-3)+(-5)} = a^{-8}.$$

$$2) a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

deci:

$$a^{-m} : a^{(-n)} = a^{-m-(-n)}, \quad -m + n =$$

adică formula: $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$) se păstrează și în cazul exponenților negativi.

Exemple:

$$a^{-6} : a^{-5} = a^{-6+5} = a^{-1}; \quad a^{-3} : a^{-5} = a^{-3+5} = a^2;$$

$$a^7 : a^{-3} = a^{7+3} = a^{10}; \quad a^{-3} : a^2 = a^{-3-2} = a^{-5}.$$

$$3) (a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = \left(\frac{a^m}{1}\right)^n = a^{m \cdot n} = a^{(-m)(-n)},$$

deci:

$$(a^{-m})^{-n} = a^{(-m)(-n)},$$

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{(-m)n},$$

deci

$$(a^{-m})^n = a^{(-m)n}.$$

Adică, formula $(a^m)^n = a^{mn}$ se aplică și în cazul când unul dintre exponenți este negativ sau amândoi sînt negativi.

Exemple:

$$(a^{-5})^3 = a^{(-5) \cdot 3} = a^{-15}; \quad (a^{-4})^{-3} = a^{(-4) \cdot (-3)} = a^{12}.$$

$$4) (ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n},$$

deci:

$$(ab)^{-n} = a^{-n} \cdot b^{-n},$$

adică formula $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ rămîne valabilă și pentru exponenți negativi.

Exemplu:

$$(ab)^{-3} = a^{-3} \cdot b^{-3}.$$

Calcululele cu expresii care conțin exponenți întregi negativi se fac asemănător cu cele cu exponenți pozitivi.

Exemple:

$$1) (a^{-2} + b^{-2})^2 = (a^{-2})^2 + 2a^{-2} \cdot b^{-2} + (b^{-2})^2 = a^{-4} + 2a^{-2}b^{-2} + b^{-4}.$$

$$2) (x^{-2} - y^{-3})^2 = (x^{-2})^2 - 2x^{-2}y^{-3} + (y^{-3})^2 = x^{-4} - 2x^{-2}y^{-3} + y^{-6}.$$

$$3) (a^{-5} + b^{-3})(a^{-5} - b^{-3}) = (a^{-5})^2 - (b^{-3})^2 = a^{-10} - b^{-6}.$$

$$4) (a^{-2} + a^{-1} \cdot b^{-1} + b^{-2})(a^{-1} - b^{-1}) = a^{-3} + a^{-2}b^{-1} + a^{-1}b^{-2} - a^{-2}b^{-1} - a^{-1}b^{-2} - b^{-3} = a^{-3} - b^{-3}.$$

Observație. O largă aplicare o au puterile negative pentru exprimarea numerelor foarte mici și îndeosebi puterile negative ale numărului 10, care este baza curentă de numerație.

Astfel:

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}; \quad 0,01 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}; \quad 0,001 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3};$$

$$0,0001 = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}; \quad 0,00001 = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}; \quad 0,000001 = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}.$$

APLICAȚII

În fizică intervin deseori mărimi foarte mici, pe care le exprimăm simplu prin folosirea puterilor negative ale numărului 10.

a) Coeficientul de dilatație liniară al fierului este 0,000012, iar al aluminiului este 0,000023.

Să scriem acești coeficienți folosind puterile negative ale numărului 10.

Putem scrie: $0,000012 = 12 \cdot 0,000001 = 12 \cdot 10^{-6}$ și $0,000023 = 23 \cdot 0,000001 = 23 \cdot 10^{-6}$.

b) Greutatea atomului de hidrogen este:

$$0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 167\ \text{g}.$$

$$\text{Avem: } 167 \cdot 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 167 \cdot 10^{-24}.$$

c) Lungimea de undă a razelor γ (gamă), exprimată în centimetri, este cuprinsă între numerele 0,000 000 003 și 0,000 000 000 05. Să exprimăm aceste limite cu ajutorul puterilor negative ale numărului 10.

$$\text{Avem: } 0,000\ 000\ 003 = 3 \cdot 0,000\ 000\ 001 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ și}$$

$$0,000\ 000\ 000\ 05 = 5 \cdot 0,000\ 000\ 000\ 01 = 5 \cdot 10^{-11}.$$

Din aceste exemple se vede avantajul scrierii numerelor foarte mici cu ajutorul puterilor negative ale numărului 10.

3) EXPONENȚI RAȚIONALI

Am văzut că rădăcina unei puteri se poate obține păstrind baza neschimbată și împărțind exponentul puterii cu indicele radicalului, cu condiția ca exponentul puterii să fie divizibil cu indicele radicalului.

Astfel:

$$\sqrt[4]{a^{12}} = a^3, \quad \text{adică} \quad \sqrt[4]{a^{12}} = a^{\frac{12}{4}},$$

$$\sqrt[5]{a^{20}} = a^4 \quad \text{adică} \quad \sqrt[5]{a^{20}} = a^{\frac{20}{5}},$$

sau, în general:

$$\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}, \quad p \text{ fiind divizibil cu } m. \quad (1)$$

Constatăm că puterea $a^{\frac{p}{m}}$ are sens precis când p se divide cu m și reprezintă puteri întregi ale numărului a .

Ca să lărgim valabilitatea acestei reguli, definim puterea cu exponent fracționar, admitând prin definiție egalitatea (1) citită invers:

$$a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p} \cdot (a \geq 0)$$

și în cazurile când p nu este divizibil cu m și avem următoarea definiție:

Dacă $a \geq 0$ și $\frac{p}{m}$ un număr rațional pozitiv convenim să considerăm că:

$$a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p},$$

adică:

Orice putere cu exponent fracționar este prin definiție un radical, care are ca indice numitorul exponentului, iar sub radical baza ridicată la o putere egală cu numărătorul exponentului.

Conform definiției, avem:

$$27^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{27^2} = \sqrt[3]{27} = 3;$$

$$128^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{128^3} = \sqrt[7]{2^{21}} = 2^3 = 8.$$

Definiția adoptată trebuie să fie în concordanță cu regulile de calcul

și să dea cu precizie valoarea puterii $a^{\frac{p}{m}}$.

Pentru aceasta trebuie să arătăm că proprietatea puterilor cu exponenți întregi și pozitivi: dacă $m = n$; atunci și $a^m = a^n$, este adevărată și pentru puteri cu exponenți fracționari.

Teoremă: Dacă $\underbrace{\frac{p}{m} = \frac{p'}{m'}}_{\text{Ipoteza}}$, atunci și $\underbrace{a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p'}{m'}}}_{\text{concluzia}}$.

Demonstrație: Din ipoteză deducem:

$$m'p = mp'$$

și prin urmare:

$$a^{m'p} = a^{mp'} \text{ și } \sqrt[m']{a^{m'p}} = \sqrt[m]{a^{mp'}},$$

de unde:

$$\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m']{a^{p'}},$$

adică:

$$a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p'}{m'}} \quad (\text{conform definiției}),$$

ceea ce era de demonstrat.

Din această demonstrație rezultă că valoarea unei puteri nu se schimbă dacă se înlocuiește exponentul cu alt exponent egal cu el. Cum exponentul puterii este o fracție, și prin simplificare și amplificare se obțin fracții

egale, înseamnă că: *Putem simplifica sau amplifica exponentul puterii $a^{\frac{p}{m}}$, fără ca valoarea puterii să se schimbe.*

Putem scrie:

$$a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{4}{10}} = a^{\frac{6}{15}}.$$

Observare importantă: Trebuie să facem distincție clară între puterea $a^{\frac{1}{5}}$, care este definită numai pentru $a \geq 0$, și radicalul $\sqrt[5]{a}$, care este definit pentru orice a real.

Egalitatea:

$$a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a} \text{ are loc numai pentru } a \geq 0.$$

Într-adevăr, deoarece putem avea:

$a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{10}}$ (prin amplificarea exponentului), rezultă $a \geq 0$, pentru că egalitatea: $\sqrt[5]{a} = \sqrt[10]{a^2}$ nu are loc decât dacă $a \geq 0$.

4) OPERAȚII CU PUTERI RAȚIONALE

Să arătăm că proprietățile stabilite pentru puterile cu exponenți întregi sînt valabile și pentru puterile cu exponenți raționali:

$$1) a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{pn}} \cdot \sqrt[mn]{a^{mq}} = \sqrt[mn]{a^{pn+mq}} = a^{\frac{pn+mq}{mn}},$$

deci:

$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m} + \frac{q}{n}}.$$

Dacă exponenții sînt negativi, avem:

$$a^{-\frac{p}{m}} \cdot a^{-\frac{q}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{m}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{q}{n}}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{m} + \frac{q}{n}}} = a^{-\left(\frac{p}{m} + \frac{q}{n}\right)},$$

deci:

$$a^{-\frac{p}{m}} \cdot a^{-\frac{q}{n}} = a^{\left(-\frac{p}{m}\right) + \left(-\frac{q}{n}\right)}.$$

Rezultă că formula $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ se păstrează și în cazul exponenților fracționari (pozitivi și negativi).

Exemplu:

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}.$$

$$a^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{2}{3} - \frac{3}{4}}.$$

$$2) a^{\frac{p}{m}} : a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[m]{a^p} : \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[mn]{a^{pn}} : \sqrt[mn]{a^{mq}} = \sqrt[mn]{a^{pn-mq}} = a^{\frac{pn-mq}{mn}},$$

deci:

$$a^{\frac{p}{m}} : a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m} - \frac{q}{n}} \quad (a \neq 0).$$

Dacă exponenții sînt negativi, avem:

$$a^{-\frac{p}{m}} : a^{-\frac{q}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{m}}} : \frac{1}{a^{\frac{q}{n}}} = \frac{a^{\frac{q}{n}}}{a^{\frac{p}{m}}} = a^{\frac{q}{n} - \frac{p}{m}} \quad (a \neq 0),$$

deci:

$$a^{-\frac{p}{m}} : a^{-\frac{q}{n}} = a^{-\frac{p}{m} - \left(-\frac{q}{n}\right)}.$$

Rezultă că formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ este valabilă și în cazul exponenților fracționari.

Exemple:

$$a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{3}{5}} = a^{\frac{1}{15}};$$

$$a^{-\frac{1}{2}} : a^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{4}}.$$

$$3) \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = (\sqrt[n]{a^{\frac{p}{m}}})^{\frac{q}{n}} = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a^{\frac{p}{m}}})^q} = \sqrt[n]{a^{\frac{pq}{mn}}} = a^{\frac{pq}{mn}},$$

deci:

$$\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m} \cdot \frac{q}{n}}.$$

Dacă exponenții sînt negativi, avem:

$$\left(a^{-\frac{p}{m}}\right)^{-\frac{q}{n}} = \left(\frac{1}{a^{\frac{p}{m}}}\right)^{-\frac{q}{n}} = \left(\frac{a^{\frac{p}{m}}}{1}\right)^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m} \cdot \frac{q}{n}},$$

deci:

$$\left(a^{-\frac{p}{m}}\right)^{-\frac{q}{n}} = a^{\left(-\frac{p}{m}\right) \cdot \left(-\frac{q}{n}\right)}.$$

Rezultă că formula $(a^m)^n = a^{mn}$ se aplică și în cazul exponenților fracționari (pozitivi și negativi).

Exemple:

$$\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{7}} = a^{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}} = a^{\frac{15}{28}}; \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{2}{5}} = a^{\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)} = a^{\frac{4}{15}}.$$

$$4) (ab)^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{(ab)^p} = \sqrt[m]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[m]{b^p} = a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{p}{m}},$$

deci:

$$(ab)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{p}{m}}.$$

Dacă exponenții sînt negativi, avem:

$$a^{-\frac{p}{m}} \cdot b^{-\frac{p}{m}} = (ab)^{-\frac{p}{m}} = \frac{1}{(ab)^{\frac{p}{m}}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{p}{m}}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{m}}} \cdot \frac{1}{b^{\frac{p}{m}}} = a^{-\frac{p}{m}} \cdot b^{-\frac{p}{m}},$$

deci:

$$(ab)^{-\frac{p}{m}} = a^{-\frac{p}{m}} \cdot b^{-\frac{p}{m}}.$$

Rezultă că formula $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ se aplică și în cazul exponenților fracționari (pozitivi și negativi).

Exemple:

$$(ab)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}},$$

$$(ab)^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{3}{4}}.$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^n}},$$

deci:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}.$$

Dacă exponenții sînt negativi, avem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}} = \frac{b^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n}{m}}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{m}},$$

deci:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{n}{m}} = \frac{a^{-\frac{n}{m}}}{b^{-\frac{n}{m}}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Rezultă că formula $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ este valabilă și în cazul exponenților fracționari (pozitivi și negativi).

Exemple:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{5}{6}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{5}{6}} = \frac{b^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{5}{6}}}.$$

Din cele arătate mai sus rezultă că operațiile cu puteri care conțin exponenți fracționari se fac după regulile care se aplică puterilor întregi.

Exemple:

$$1) \left(a^{-\frac{4}{3}} + b^{-\frac{3}{5}}\right) \left(a^{-\frac{4}{3}} - b^{-\frac{3}{5}}\right) = a^{-\frac{8}{3}} - b^{-\frac{6}{5}}.$$

2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{-2}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{-2} + b^{-4}\right)$; le înmulțim ca două polinoame și avem:

$$a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} b^{-2} + a^{\frac{1}{3}} b^{-4} + b^{-2} a^{\frac{2}{3}} - b^{-2} a^{\frac{1}{3}} b^{-2} + b^{-6} = a^{\frac{3}{3}} - a^{\frac{2}{3}} b^{-2} +$$

$$+ a^{\frac{1}{3}} b^{-4} + a^{\frac{2}{3}} b^{-2} - a^{\frac{1}{3}} b^{-4} + b^{-6} = a + b^{-6}.$$

3) $(\sqrt[8]{x} - 1) \left(x^{\frac{1}{8}} + 1\right) (\sqrt[4]{x} + 1) \left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right) (x + 1)$; scriem radicalii sub formă de putere fracționară, observăm că avem produse de binoame sumă prin binoame diferență și obținem:

$$\left(x^{\frac{1}{8}} - 1\right) \left(x^{\frac{1}{8}} + 1\right) \left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right) \left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right) (x + 1) = \left(x^{\frac{1}{4}} - 1\right) \left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right) \left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right) (x + 1) =$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right) (x + 1) = (x - 1) (x + 1) = x^2 - 1.$$

4) $\left(x^{\frac{3}{2}} - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{3}{2}}\right) : \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)$. Împărțirea o facem la fel ca la polinoame. Obținem:

$$\begin{array}{r} x^{\frac{3}{2}} - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{3}{2}} \quad \left| \begin{array}{l} x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \\ x + y \end{array} \right. \\ \underline{-x^{\frac{3}{2}} + xy^{\frac{1}{2}}} \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{3}{2}} \\ \underline{-x^{\frac{1}{2}}y + y^{\frac{3}{2}}} \\ \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

Am obținut citul $x + y$ și restul 0, adică împărțirea s-a făcut exact.

EXERCITII

Generalizarea noțiunii de putere

1) Să se scrie cu ajutorul puterilor negative numerele:

0,0015; 0,000 000 654; 0,000 000 000 17.

2) Să se scrie sub formă de expresii cu exponenți negativi:

$$\frac{3}{a^2 b^5}; \frac{1}{x^2 y}; \frac{a}{7 x^3 y^2}; \frac{4}{(x - y)^2}; \frac{1}{(x^2 + y^2)^3}.$$

3) Se dau următoarele lungimi de undă, în centimetri (limite inferioare și superioare):

lumina vizibilă 0,000 075 — 0,000 037;
ultraviolet 0,000 0375 — 0,000 001;

raze X 0,000 003 — 0,000 006;
fotoni și raze cosmice 0,000 000 000 002 — 0,000 000 000 000 01.

Să se scrie sub formă de puteri negative ale numărului 10.

II. Să se efectueze operațiile:

- 1) $a^5 \cdot a^{-4}$; $a^3 \cdot a^{-7} \cdot a^{-3}$; $x^8 : x^{-2}$; $a^{-6} : a^{-3}$.
- 2) $3a^5 \cdot \frac{2}{21} \cdot a^{-5} \cdot 7a^{-4}$; $14a^{-2} : 7a^{-1}$. 3) $(a^3 + a^{-2} - a^{-3}) \cdot a^3$; $(x^{-4} \cdot x^{-2}) : x^{-2}$.
- 4) $(5a^{-1} + 4b^2)(4b^2 - 5a^{-1})$; $(x^{-3} + y^{-3})^2$; $(x^{-1} + y^{-1})^3$.
- 5) $(a^{-4} + a^{-3} + a^{-2} + a^{-1} + a^0 + a) : (a^{-2} + a)$.
- 6) $(6x^2 - 10x - 6 + 4x^{-1}) : (2x - 4)$.

III. Să se efectueze:

- 1) $\left(1\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{8}{11}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$.
- 2) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{7}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{9}{2}}$; $x^{\frac{5}{6}} : x^{-\frac{1}{3}}$; $6ab^{-1} : 3ab^{-2}$.
- 3) $\left(\frac{16x^{-4}}{81x^8}\right)^{\frac{1}{4}}$; $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}} - \frac{x+y}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}$.
- 4) $\left(a^{-\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}\right)\left(a^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)$.
- 5) $(\sqrt[3]{x}-1)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)(\sqrt[3]{x}+1)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1\right)$.
- 6) $\left(a^{\frac{7}{2}} - a^3 + a^{\frac{5}{2}} - a^2 + a^{\frac{3}{2}} - a + a^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)$.
- 7) $\left(x^2 - x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + 2y^{\frac{3}{4}}\right) : \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)$.

IV. Să se efectueze operațiile:

$$1) \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-0,5}}{9^{-2}}}$$

$$2) \frac{\left[a^{\frac{2}{3}}(ab)^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[a^{-\frac{3}{2}}(ab)^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{1}{4}}}$$

V. Să se afle valoarea expresiei:

$$\left[\frac{(x^3 + a^3)^{-\frac{1}{2}} + (x^3 - a^3)^{-\frac{1}{2}}}{(x^3 + a^3)^{-\frac{1}{2}} - (x^3 - a^3)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2} \text{ pentru } x = a\left(\frac{m^2 + n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$a > 0, n > m > 0.$

$a^{\frac{1}{2}} \cdot ab^{\frac{1}{2}}$

ECUAȚIA DE GRADUL DOI ȘI ECUAȚII IRAȚIONALE

1. ECUAȚIA DE GRADUL DOI

Pentru rezolvarea ecuației de gradul doi de care ne vom ocupa mai departe se folosesc principiile pe baza cărora se transformă o ecuație într-o altă ecuație echivalentă (vezi teoremele de echivalență ale ecuațiilor).

Se va mai folosi proprietatea care are loc în orice corp și care afirmă că: $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ sau } y = 0)$ proprietatea P_1 (Capitolul I — Reguli de calcul într-un corp).

Această proprietate arată că *un produs este egal cu 0, atunci și numai atunci când cel puțin unul din factorii săi este egal cu 0.*

De aici rezultă că mulțimea soluțiilor unei ecuații care se prezintă sub forma unui produs egal cu 0 este reuniunea mulțimilor soluțiilor ecuațiilor obținute, egalând fiecare factor cu 0.

Exemplu:

$$(x - 3)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow (x - 3 = 0 \text{ sau } x - 5 = 0) \Leftrightarrow (x = 3 \text{ sau } x = 5).$$

Așadar ecuația $(x - 3)(x - 5) = 0$ are soluțiile $x = 3$ și $x = 5$.

ECUAȚIA DE GRADUL DOI CU O NECUNOSCUTĂ

Se numește ecuație de gradul doi cu o necunoscută x orice ecuație echivalentă cu o ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde literele a, b, c reprezintă constante și $a \neq 0$.

Exemple:

$$5x^2 + 8x + 3 = 0$$

$$(a = 5, \quad b = 8, \quad c = 3);$$

$$-2x^2 + x - 3 = 0$$

$$(a = -2, \quad b = 1, \quad c = -3);$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$(a = \frac{1}{4}, \quad b = -5, \quad c = 3);$$

$$3x^2 - 8 = 0$$

$$(a = 3, \quad b = 0, \quad c = -8);$$

$$4x^2 - 7x = 0$$

$$(a = 4, \quad b = -7, \quad c = 0).$$

Rezolvarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, în corpul numerelor reale se reduce la determinarea mulțimii:

$$\{x \in R \mid ax^2 + bx + c = 0\}.$$

a) Rezolvarea ecuației de gradul doi de formă $x^2 - A = 0$ ($a = 1$, $b = 0$, $c = -A$).

$$\text{Avem: } x^2 - A = 0 \Leftrightarrow x^2 = A.$$

1. Dacă $A < 0$, ecuația $x^2 = A$ (și deci $x^2 - A = 0$) nu are nici o soluție, deoarece nu există nici un număr real x al cărui pătrat să fie un număr negativ.

De exemplu, ecuația $x^2 + 1 = 0$ (respectiv $x^2 = -1$ nu are soluție).

2. Dacă $A > 0$ avem:

$x^2 - A = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{A})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{A})(x + \sqrt{A}) = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{A} = 0 \text{ sau } x + \sqrt{A} = 0) \Leftrightarrow (x = \sqrt{A} \text{ sau } x = -\sqrt{A})$. Așadar, ecuația $x^2 - A = 0$ (respectiv $x^2 = A$), în cazul $A > 0$ are două soluții, și anume $x_1 = \sqrt{A}$ și $x_2 = -\sqrt{A}$. Se scrie $x_{1,2} = \pm\sqrt{A}$.

Exemple:

1. Ecuația $x^2 - 5 = 0$ (respectiv $x^2 = 5$) are soluțiile $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$, adică $x_1 = \sqrt{5}$ și $x_2 = -\sqrt{5}$.

2. Ecuația $x^2 - 9 = 0$ (respectiv $x^2 = 9$) are soluțiile $x_{1,2} = \pm\sqrt{9}$ sau $x_{1,2} = \pm 3$. Deci, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

3. Dacă $A = 0$, adică în cazul ecuației $x^2 = 0$, există un singur număr real care verifică egalitatea $x^2 = 0$, și anume $x = 0$. În acest caz se mai spune că ecuația admite două soluții egale, și anume $x_1 = x_2 = 0$.

b) Rezolvarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Vom transforma ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ succesiv în ecuații echivalente, înmulțind cu $4a \neq 0$, apoi adunând și scăzând b^2 și în sfârșit, punind în evidență o diferență de pătrate.

Făcînd aceste operații obținem:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Cazuri:

1. Dacă $b^2 - 4ac < 0$ ecuația $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ nu are nici o soluție, căci $(2ax + b)^2 \geq 0$.

2. Dacă $b^2 - 4ac > 0$, atunci putem scrie $b^2 - 4ac = (\sqrt{b^2 - 4ac})^2$ și deci considerînd ecuația $(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$, care este echivalentă cu ecuația inițială, obținem:

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2 = 0 \Leftrightarrow (2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac})(2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}) = 0 \Leftrightarrow (2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \text{ sau } 2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac} = 0).$$

Ecuatia de gradul întâi $2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ are soluția $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, iar ecuația $2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ are soluția $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Numerele x_1 și x_2 sînt și soluțiile ecuației inițiale. Se scrie $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

3. Dacă $b^2 - 4ac = 0$, atunci ecuația $(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0$, echivalentă cu cea inițială devine $(2ax + b)^2 = 0$, de unde deducem $2ax + b = 0$ sau $x = \frac{-b}{2a}$. În acest caz se spune că ecuația admite două soluții egale și se scrie $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Expresia $b^2 - 4ac$ se numește *realizantul* sau *discriminantul* ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, și se notează cu litera Δ ($\Delta = b^2 - 4ac$).

Din discuția făcută mai înainte rezultă că:

- a) dacă $\Delta < 0$ ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ nu admite nici o soluție (reală);
- b) dacă $\Delta \geq 0$ ecuația admite soluții reale date de formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dacă $\Delta > 0$, avem $x_1 \neq x_2$ și spunem că avem două soluții distincte, iar dacă $\Delta = 0$, spunem că avem două soluții egale ($x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$).

Pentru a rezolva o ecuație de gradul doi de forma $ax^2 + bx + c = 0$, facem întâi discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$ și vedem în ce caz ne situăm:

$\Delta \geq 0$ sau $\Delta < 0$. Dacă avem $\Delta \geq 0$, folosim formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Exemple:

1. Să se rezolve ecuația:

$$2x^2 + 3x + 9 = 0 \quad (a = 2, b = 3, c = 9)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9 - 72 = -63 < 0.$$

Ecuația nu are soluții reale

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x + 9 = 0\} = \emptyset.$$

2. Să se rezolve ecuația:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 20 = 16 > 0.$$

Avem:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}. \text{ Deci } x_1 = \frac{6 + 4}{2} = 5, \text{ iar } x_2 = \frac{6 - 4}{2} = 1.$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 5 = 0\} = \{1, 5\}.$$

3. Să se rezolve ecuația:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Delta = 36 - 36 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2}. \text{ Deci } x_1 = x_2 = 3.$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 9 = 0\} = \{3\}.$$

O b s e r v a Ț i i. a) Dacă ecuația de gradul doi nu se prezintă sub forma $ax^2 + bx + c = 0$, atunci se aduce la această formă procedându-se analog cu ecuația de gradul întâi, numai că la această ecuație se trec toți termenii în membrul stâng.

b) Soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ (când există) se numesc *zerourile* sau *rădăcinile* polinomului $ax^2 + bx + c$. Din acest motiv vom spune, uneori, în loc de soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, rădăcinile ecuației.

Cazuri particulare:

a) Cazul când coeficientul lui x este număr par, adică $b = 2b'$ ($b' \in \mathbb{Z}$)
Avem:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

$$\text{Așadar, } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \text{ (când există).}$$

Numărul $b'^2 - ac$ va fi numit și în acest caz la fel realizantul ecuației și se va nota, când nu există posibilitatea vreunei confuzii, tot cu litera Δ ($\Delta = b'^2 - ac$).

E x e m p l u:

Să se rezolve ecuația $x^2 - 6x + 5 = 0$ ($b = -6$, $b' = -3$).

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 5}}{1} \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 1.$$

b) În cazul când $c = 0$ și $b \neq 0$ ($a \neq 0$) ecuația este de forma: $ax^2 + bx = 0$.

Se poate aplica formula de rezolvare, dar este mai simplu următorul mod de rezolvare:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ sau } ax + b = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ sau } x = \frac{-b}{a}).$$

Așadar, ecuația are soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{-b}{a}$.

E x e m p l u:

$$4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(4x - 5) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ sau } 4x - 5 = 0).$$

$$\text{Deci, } x_1 = 0 \text{ și } x_2 = \frac{5}{4}.$$

c) Cazul când $b = 0$ și $c \neq 0$ ($a \neq 0$). Ecuația este de forma $ax^2 + c = 0$. În acest caz se poate aplica formula de rezolvare, dar este mai simplu următorul procedeu:

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Dacă $-\frac{c}{a} < 0$ ecuația nu are soluții.

Dacă $-\frac{c}{a} \geq 0$, $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Exemple:

1. $2x^2 + 3 = 0 \iff x^2 = -\frac{3}{2}$. Ecuația nu are soluții.

2. $4x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = \frac{9}{4} \iff x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$.

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Relațiile dintre coeficienți și rădăcini

Dacă $\Delta \geq 0$ avem:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

de unde deducem că,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a \cdot 2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Formulele:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

prin care se exprimă suma și produsul rădăcinilor unei ecuații de gradul doi în funcție de coeficienți se numesc *relațiile dintre coeficienți și rădăcini*.

Exemplu:

Fie ecuația $x^2 - 7x + 3 = 0$ ($\Delta = 49 - 12 > 0$).

Avem:

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{1} = 7;$$

$$x_1 x_2 = \frac{3}{1} = 3.$$

2. ECUAȚII IRAȚIONALE

Se numește ecuație irațională orice ecuație în care necunoscuta figurează sub radicali.

Rezolvarea ecuațiilor iraționale se bazează, în cele mai multe cazuri, pe următoarea implicație

$$x = y \Rightarrow x^2 = y^2.$$

Observație. Din $x^2 = y^2$, nu rezultă $x = y$.

Exemplu: $(-5)^2 = 5^2$, dar $-5 \neq 5$.

Implicația menționată mai înainte va fi folosită sub următoarea formă:

$\sqrt{E(x)} = F(x) \Rightarrow E(x) = (F(x))^2$. Soluțiile ecuației $\sqrt{E(x)} = F(x)$ se află printre soluțiile ecuației $E(x) = (F(x))^2$, dar nu orice soluție a ecuației a doua, este întotdeauna o soluție a ecuației $\sqrt{E(x)} = F(x)$. De aceea, când se rezolvă ecuația $\sqrt{E(x)} = F(x)$ se află soluțiile ecuației $E(x) = (F(x))^2$ și apoi se înlocuiesc acestea în ecuația $\sqrt{E(x)} = F(x)$, eliminându-se soluțiile care nu verifică această ecuație.

Observație. Pentru ca o soluție a ecuației $E(x) = (F(x))^2$ să fie soluție a ecuației $\sqrt{E(x)} = F(x)$ este necesar ca $E(x) \geq 0$. (Dacă $E(x) < 0$, atunci $\sqrt{E(x)}$ nu este definit și deci valoarea respectivă a lui x nu este o soluție.)

Exemple:

1. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{10 - x} = 4x - 1.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \sqrt{10 - x} = 4x - 1 &\Rightarrow (\sqrt{10 - x})^2 = (4x - 1)^2 \Rightarrow 10 - x = \\ &= 16x^2 - 8x + 1 \Rightarrow 16x^2 - 7x - 9 = 0. \end{aligned}$$

Rezolvând ecuația $16x^2 - 7x - 9 = 0$ obținem:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{9}{16}.$$

Verificare (în ecuația inițială)

a) $\sqrt{10 - 1} = 4 \cdot 1 - 1$ sau $3 = 3$. Așadar, $x = 1$ este o soluție a ecuației date.

b) $\sqrt{10 + \frac{9}{16}} = 4 \left(-\frac{9}{16}\right) - 1$ sau $\sqrt{\frac{169}{16}} = -\frac{52}{16}$ sau $\frac{13}{4} = -\frac{13}{4}$, egalitate care este

falsă. $x = -\frac{9}{16}$ nu este o soluție a ecuației inițiale.

Așadar, ecuația inițială are soluția $x = 1$.

2. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x + 6} + x = 6.$$

În acest caz se lasă radicalul într-un membru al ecuației și se trec ceilalți termeni în celălalt membru (această operație se numește *izolarea radicalului*).

Avem:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+6} &= 6-x \Rightarrow x+6 = (6-x)^2 \Rightarrow x+6 = 36 - \\ &- 12x + x^2 \Rightarrow x^2 - 13x + 30 = 0.\end{aligned}$$

Rezolvând ecuația $x^2 - 13x + 30 = 0$ obținem soluțiile $x_1 = 3$ și $x_2 = 10$.

Soluția $x = 3$ verifică ecuația inițială, dar soluția $x = 10$ nu verifică această ecuație. Așadar, ecuația $\sqrt{x+6} - x = 6$ admite o singură soluție, și anume $x = 3$.

Uneori când verificarea este greoaie pentru rezolvarea ecuațiilor iraționale de forma $\sqrt{E(x)} = F(x)$ se aplică următoarea proprietate:

$$\sqrt{E(x)} = F(x) \Leftrightarrow (E(x) = [F(x)]^2 \text{ și } E(x) \geq 0 \text{ și } F(x) \geq 0).$$

Această echivalență este adevărată căci:

a) dacă egalitatea $\sqrt{E(x)} = F(x)$ este adevărată, atunci $\sqrt{E(x)}$ trebuie să fie pozitiv sau 0, căci egalitatea este adevărată când toți termenii care intervin au sens. Dar cum $\sqrt{E(x)} \geq 0$, rezultă că $F(x) \geq 0$. Așadar, $\sqrt{E(x)} = F(x) \Rightarrow (E(x) = [F(x)]^2 \text{ și } E(x) \geq 0 \text{ și } F(x) \geq 0)$.

b) dacă afirmația „ $E(x) = F(x)^2$ și $E(x) \geq 0$ și $F(x) \geq 0$ ” este adevărată, atunci $\sqrt{E(x)} = F(x)$. (Într-adevăr, dacă două numere pozitive sînt egale, atunci și rădăcinile pătrate ale acestora sînt egale: deci din $E(x) = (F(x))^2$, rezultă $\sqrt{E(x)} = F(x)$. Așadar, $(E(x) = F(x)^2 \text{ și } E(x) \geq 0 \text{ și } F(x) \geq 0) \Rightarrow \sqrt{E(x)} = F(x)$.

În loc de $\sqrt{E(x)} = F(x) \Leftrightarrow (E(x) = (F(x))^2 \text{ și } E(x) \geq 0 \text{ și } F(x) \geq 0)$ vom scrie:

$$\sqrt{E(x)} = F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) = (F(x))^2 \\ E(x) \geq 0 \\ F(x) \geq 0. \end{cases}$$

Cînd rezolvăm ecuația $\sqrt{E(x)} = F(x)$ pe baza echivalenței menționate mai înainte aflăm întîi soluțiile ecuației $E(x) = (F(x))^2$ și apoi pentru a stabili soluțiile ecuației $\sqrt{E(x)} = F(x)$, aflăm acele soluții ale ecuației $E(x) = (F(x))^2$ care verifică inegalitățile $E(x) \geq 0$ și $F(x) \geq 0$.

Exemplu:

Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x^2 - 7x + 6} = 2x - 2.$$

Avem:

$$\sqrt{x^2 - 7x + 6} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 4x^2 - 8x + 4 \\ x^2 - 7x + 6 \geq 0 \\ 2x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Ecuția $x^2 - 7x + 6 = 4x^2 - 8x + 4$, care după reduceri devine $3x^2 - x - 2 = 0$, are soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -\frac{2}{3}$. Verificând în inegalitățile $x^2 - 7x + 6 \geq 0$ și $2x - 2 \geq 0$, cele două valori $x = 1$ și $x = -\frac{2}{3}$, găsim:

a) $1 - 7 + 6 \geq 0$ sau $0 \geq 0$ (inegalitate adevărată).

$2 \cdot 1 - 2 \geq 0$ sau $0 \geq 0$ (inegalitate care este adevărată)

Așadar, $x = 1$ este o soluție a ecuației

$$x^2 - 7x + 6 = 2x - 2.$$

b) $\frac{4}{9} + \frac{14}{3} + 6 \geq 0$ (această inegalitate este adevărată)

$2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 \geq 0$ sau $-\frac{4}{3} - 2 \geq 0$ (această inegalitate este falsă). $x =$

$= -\frac{2}{3}$ nu este o soluție a ecuației date.

Deci ecuația $\sqrt{x^2 - 7x + 6} = 2x - 2$ are o singură soluție, și anume $x = 1$.

Observație. În cazul când ecuația irațională conține radicali avînd indicele mai mare ca 2 se folosesc următoarele proprietăți:

1. $\sqrt[n]{x} = y \Rightarrow x = y^n$ dacă n este par.

(În acest caz este necesar ca soluțiile obținute după ridicarea la puterea a n -a să fie verificate în ecuația inițială).

$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$ dacă n este impar.

EXERCITII

1. Ecuația de gradul doi

Să se rezolve ecuațiile și să se scrie mulțimea soluțiilor (reale):

1. $\frac{x^2 - 12}{3} = 7x - 4.$

Rezolvare:

$$\frac{x^2 - 12}{3} = 7x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 21x - 12,$$

$$x^2 - 21x = 0 \Leftrightarrow x(x - 21) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ sau } x - 21 = 0,$$

Deci, $x_1 = 0$, $x_2 = 21$.

Mulțimea rădăcinilor este:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 - 12}{3} = 7x - 4 \right\} = \{ 0, 21 \}.$$

2. $x^2 - 7x = 0$; $5x^2 = 15x$; $-4x^2 = 17x.$

3. $\frac{-y^2}{7} - 5y = \frac{2y^2}{3}$; $\frac{z^2 - 5z}{4} = 3z^2 + \frac{z}{2}.$

4. $(\sqrt{2} + 1)x^2 - 5x = (\sqrt{3} - 4)x - x^2.$

5. $x^2 - 16 = 0.$

Rezolvare:

$$x^2 - 16 = 0 \iff x^2 = 16 \iff x = \pm 4. \text{ Deci } x_1 = -4, x_2 = 4$$

$$\{x \in R \mid x^2 - 16 = 0\} = \{-4, 4\}.$$

6. $x^2 + 7 = 0.$

Rezolvare:

$$x^2 + 7 = 0 \iff x^2 = -7. \text{ Ecuația nu are soluții reale.}$$

$$\{x \in R \mid x^2 + 7 = 0\} = \emptyset.$$

7. $3x^2 - 675 = 0; 4y^2 - 9 = 0; 3z^2 - 4 = 0; 4t^2 - 7 = 0.$

8. $x^2 + 1 = 0; 3x^2 = -5.$

9. $x^2 - 9x + 8 = 0.$

Rezolvare:

$$\Delta = 81 - 32 = 49 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\{x \in R \mid x^2 - 9x + 8 = 0\} = \{1, 8\}.$$

10. $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{x^2}{6} + \frac{3x}{2}.$

Rezolvare:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{x^2}{6} + \frac{3x}{2} \iff 6x^2 + 6x + 9 = 2x^3 + 18x \iff 4x^2 - 12x + 9 = 0,$$

$$\Delta = 0; \quad x_1 = x_2 = \frac{3}{2},$$

$$\left\{x \in R \mid \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{x^2}{6} + \frac{3x}{2}\right\} = \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

11. $x^2 + x + 1 = 0,$

$$\Delta = -3 < 0. \text{ Ecuația nu are rădăcini reale.}$$

$$\{x \in R \mid x^2 + x + 1 = 0\} = \emptyset.$$

12. $x^2 - 13x + 40 = 0; y^2 - 15y - 36 = 0.$

13. $x^2 + 20x + 96 = 0; 28a^2 + 80a + 64 = 0.$

14. $x^2 - x - 1 = 0; x^2 - 4x + 1 = 0; 16y^2 - 24y + 7 = 0.$

15. $2x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0.$

16. $x^2 - 6x + 34 = 0; 81x^2 - 30x + 85 = 0; x^2 - 2\sqrt{3}x + 7 = 0.$

17. $\frac{2x^2 - 1}{x + 1} - \frac{x - 7}{x - 1} = 4 - \frac{3x - 1}{x + 2} \quad (x \neq -1, x \neq 1, x \neq -2).$

18. $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 3}{x - 1} + \frac{3x - 1}{2(x - 1)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2 - 2}{3x - 2}, \quad \left(x \neq 1, x \neq \frac{2}{3}\right).$

19. $(1 + m^2)x^2 - (1 + m)x + m(1 - m) = 0.$

Rezolvare:

$$\Delta = (1 + m)^2 - 4m(1 - m)(1 + m^2) = (2m^2 - m + 1)^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1 + m \pm \sqrt{(2m^2 - m + 1)^2}}{2(1 + m^2)} \text{ etc.}$$

20. $(2m^2 + 5m + 2)x^2 + 3(m^2 + 1)x - 2m^2 + 5m - 2 = 0.$

21. $x^2 - 3|x| + 2 = 0.$

Rezolvare:

$$x^2 - 3|x| + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \text{ dacă } x \geq 0 \\ \text{sau} \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ ($x \geq 0$), $\Delta = 1$, $x_1 = 1 > 0$, $x_2 = 2 > 0$,

$x^2 + 3x + 2 = 0$ ($x < 0$), $\Delta = 1$, $x_3 = -2 < 0$, $x_4 = -1 < 0$.

Deci $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3|x| + 2 = 0\} = \{-2, -1, 1, 2\}.$

22. $x^2 + 7|x| - 8 = 0.$

23. $x^2 + |x - 2| = 0.$

24. Să se determine următoarele mulțimi:

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid 3x^2 - 13x + 10 = 0\},$$

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 13x + 10 = 0\},$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 3x^2 - 13x + 10 = 0\}.$$

Rezolvare:

$$3x^2 - 13x + 10 = 0 \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{10}{3},$$

$$1 \in \mathbb{Q}, \frac{10}{3} \in \mathbb{Q}, \text{ deci } \left\{x \in \mathbb{Q} \mid 3x^2 - 13x + 10 = 0\right\} = \left\{1, \frac{10}{3}\right\},$$

$$1 \in \mathbb{Z}, \frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}, \text{ deci } \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 13x + 10 = 0\} = \{1\},$$

$$1 \in \mathbb{N}, \frac{10}{3} \notin \mathbb{N}, \text{ deci } \{x \in \mathbb{N} \mid 3x^2 - 13x + 10 = 0\} = \{1\}.$$

25. Să se determine următoarele mulțimi:

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 5|x| + 6 = 0\},$$

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 5|x| + 6 = 0\},$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 5|x| + 6 = 0\}.$$

26. Să se determine mulțimea:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ și } x^2 - 7|x| + 8 = 0\}.$$

27. Fie mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3|x| + 2 = 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4|x| + 3 = 0\}.$$

Să se determine mulțimile $A \cup B$ și $A \cap B$.

Rezolvare:

$$\text{Avem } A = \{-2, -1, 1, 2\}, \quad B = \{-3, -1, 1, 3\},$$

$$A \cup B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\},$$

$$A \cap B = \{-1, 1\}.$$

28. Fie mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5|x| + 4 = 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + 6|x| - 5 = 0\}.$$

Să se determine mulțimile $A \cup B$ și $A \cap B$.29. Fie ecuația $x^2 - 7x + 4 = 0$ ($\Delta > 0$). Să se calculeze:

$$x_1^2 + x_2^2; \quad x_1^3 + x_2^3; \quad x_1^4 + x_2^4; \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}.$$

30. Se dă ecuația $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 5 = 0$.Să se determine m astfel încât $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 12$.

2. Ecuații iraționale

Să se rezolve ecuațiile:

$$1. \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3} \quad 2. \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = \frac{\sqrt{x} - 6}{\sqrt{x} - 7} \quad 3. \sqrt{x-9} = \frac{3}{\sqrt{x-9}} - \sqrt{x}.$$

$$4. 5\sqrt{2x+3} - \sqrt{18x-5} = \frac{4(x+3)}{\sqrt{2x-3}} \quad 5. \sqrt{x+8} - \sqrt{5x+20} + 2 = 0.$$

$$6. \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x} \quad 7. \sqrt[3]{x-1} - x = -1.$$

$$8. \sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1+x} = 0 \quad 9. \frac{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x-1}} = 2.$$

$$10. 3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2+5x+1} = 2 \quad 11. \sqrt{a+\sqrt{x}} - \sqrt{a-\sqrt{x}} = \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

$$12. \frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}} = \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b}}{\sqrt{x-b}}.$$

PROBLEME DE GRADUL DOI CU O NECUNOSCUTĂ

1. Suma pătratelor a trei numere pare consecutive este 116. Să se afle aceste numere.
2. Să se afle un număr de două cifre, știind că cifra zecilor este cu 2 mai mare decât cifra unităților, iar produsul numărului cu suma cifrelor sale este 640.
3. Două robinete, curgînd împreună, pot umple un bazin în 6 ore. Primului robinet, curgînd singur, îi trebuie cu 5 ore mai puțin ca să umple bazinul, decât celui de-al doilea robinet, curgînd singur. În cît timp poate să umple bazinul fiecare robinet.
4. O brigadă a unei cooperative agricole de producție trebuia să treiere 960 căpițe de grîu. Treierînd pe zi cu 40 de căpițe mai mult decât era prevăzut în plan, treieratul se termină cu 4 zile mai devreme. Să se afle cîte căpițe trebuia treierate pe zi după plan și cîte s-au treierat în realitate.
5. La dreapta unui număr natural scriem cifra 7, apoi înmulțim numărul astfel format cu numărul natural inițial. Obținem produsul 111. Să se afle numărul inițial.
6. Un tablou împreună cu rama are dimensiunile 75 și 40 cm. Rama are peste tot aceeași lățime, iar aria ei este egală cu aria tabloului propriu-zis. Să se afle lățimea ramei.
7. Într-un birou de copiat acte s-a adus un manuscris de 480 pagini. Fiindcă 16 dactilografe erau ocupate cu alte lucrări, fiecare dintre celelalte au copiat cîte 8 pagini mai mult decât s-ar fi convenit fiecăreia, dacă ar fi lucrat toate dactilografele din birou. Să se afle numărul dactilografelor din acel birou.
8. Pe o foaie de hîrtie sînt date niște puncte așa fel încît nu se găsesc trei puncte în linie dreaptă. Dacă unim punctele acestea două cîte două prin linii drepte obținem 253 linii drepte. Cîte puncte sînt date?
9. Laturile unui triunghi dreptunghi se exprimă prin trei numere pare consecutive. Să se afle laturile acestui triunghi.
10. Un colectiv de muncitori a primit pentru o inovație 15 000 lei. După ce au depus la C.E.C. 10% din această sumă, restul au împărțit în mod egal între membrii colectivului. Cîți muncitori au fost în acest colectiv, știind că dacă erau cu doi mai puțini, ar fi primit fiecare cu 1 800 lei mai mult.

1. CORPUL NUMERELOR COMPLEXE

S-a văzut că ecuația de gradul doi cu coeficienți reali nu admite soluții reale decât dacă $\Delta \geq 0$. Apare deci, în mod natural, problema lărgirii mulțimii numerelor reale, astfel încât să fie menținute proprietățile operațiilor cu numerele reale și, în plus, ecuația de gradul doi să admită, fără restricții, soluții în noua mulțime.

În acest scop vom considera cea mai simplă ecuație de gradul doi, care nu are soluție în corpul numerelor reale, și anume $x^2 + 1 = 0$, ecuație ce mai poate fi scrisă și sub forma $x^2 = -1$ (nu există nici un număr real care ridicat la pătrat să dea -1) și vom arăta că dacă vom construi un corp în care această ecuație să aibă cel puțin o soluție, atunci orice ecuație de gradul doi are soluții în acest corp. Elementele acestui corp vor fi numerele reale, la care adăugăm elemente noi, necesare rezolvării ecuației $x^2 + 1 = 0$ sau $x^2 = -1$. Alegerea notației pentru elementul ce trebuie să aibă proprietatea că ridicat la pătrat dă -1 este la dispoziția noastră și vom folosi, în acest scop, litera i ($i^2 = -1$).

Mai precis, ne propunem să *construim un corp* care:

- să conțină toate numerele reale;
- operațiile cu numerele reale să se facă în noul corp la fel ca în corpul numerelor reale;
- să conțină un element i , astfel încât $i^2 = -1$.

Vom arăta, în continuare, că este suficient, pentru a construi noul corp, să luăm în considerație toate elementele scrise sub forma $x + yi$, unde literele x și y desemnează două numere reale arbitrare.

Pentru ca elementele de forma $x + yi$ să cuprindă, în particular, numerele reale, vom identifica elementele de forma $x + 0i$ cu numerele reale x și vom scrie $x + 0i = x$.

Cu scopul de a regăsi și elementul i printre elementele de forma $x + yi$, identificăm pe $0 + 1i$ cu i și scriem $0 + 1i = i$.

Așadar, să considerăm mulțimea C a tuturor elementelor de forma $x + yi^1$, unde x și y sînt numere reale. Așa cum am arătat mai înainte, scriem prin definiție:

$$\alpha) x + 0i = x,$$

$$\beta) 0 + 1i = i \text{ și, în plus,}$$

$$\gamma) 0 + yi = yi.$$

Elementele de forma $x + (-y)i$ vor fi scrise pe scurt $x - yi$.

Orice element $x + yi$ al mulțimii C este format din două părți:

- 1) x , care este un număr real și se numește *partea reală*,
- 2) yi , care se numește *partea imaginară*; y care este, de asemenea, un număr real, se numește *coeficientul părții imaginare*.

De exemplu, următoarele elemente fac parte din mulțimea C :

- 1) $2 + 3i$ (la acest element, partea reală este 2, iar coeficientul părții imaginare este 3);

- 2) $-\sqrt{2} + \frac{1}{2}i$ (la acest element, partea reală este $-\sqrt{2}$, iar $\frac{1}{2}$ este coeficientul părții imaginare);

- 3) $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right)i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ (la acest element partea reală este $-\frac{1}{2}$, iar $-\frac{1}{3}$ este coeficientul părții imaginare);

- 4) $2 + 0 \cdot i = 2$ (la acest element, care se identifică cu numărul real 2, partea reală este 2, iar coeficientul părții imaginare este 0);

- 5) $0 + 5 \cdot i = 5i$ (la acest element, partea reală este 0, iar coeficientul părții imaginare este 5);

- 6) $0 + 1 \cdot i = i$ (la acest element, care se identifică cu elementul i , partea reală este 0, iar coeficientul părții imaginare este 1);

- 7) $0 + 0 \cdot i = 0$ (la acest element, care se identifică cu numărul real 0, partea reală este 0, iar coeficientul părții imaginare este tot 0);

- 8) $1 + 0 \cdot i = 1$ (la acest element, care se identifică cu numărul real 1, partea reală este 1, iar coeficientul părții imaginare este 0);

- 9) $(2 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{2})i$ (la acest element, partea reală este $2 + \sqrt{3}$, iar coeficientul părții imaginare este $1 - \sqrt{2}$).

Egalitatea în C

Vom admite că între două elemente din C se scrie semnul „ $=$ ” atunci și numai atunci cînd acestea au părțile reale egale și coeficienții părților imaginare de asemenea egali, adică:

$$x + yi = x' + y'i \iff x = x' \text{ și } y = y'.$$

¹ În scrierea $x + yi$ semnul „ $+$ ” nu trebuie interpretat deocamdată ca reprezentînd o adunare. Justificarea folosirii acestui semn va fi dată mai tîrziu.

Adunarea în C

Vom defini adunarea în C , în ipoteza că elementele sînt scrise explicit cu partea reală și partea imaginară.

Fie $z_1 = x_1 + y_1i$ și $z_2 = x_2 + y_2i$ două elemente din C . Definim adunarea acestora prin formula $(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, unde $x_1 + x_2$ reprezintă suma numerelor reale x_1 și x_2 , calculată în corpul numerelor reale, iar $y_1 + y_2$ reprezintă suma numerelor reale y_1 și y_2 calculată în corpul numerelor reale.

Se vede că suma a două elemente de forma $x + yi$ este tot un element de forma $x + yi$, avînd partea reală egală cu suma părților reale ale termenilor, iar coeficientul părții imaginare egal cu suma coeficienților părților imaginare.

Exemple:

$$1. (2 + 3i) + (5 + 7i) = (2 + 5) + (3 + 7)i = 7 + 10i.$$

$$2. \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{2}i\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}i\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{4}\right)i = \frac{7}{4} + \frac{15}{4}i.$$

$$3. (-2 + 5i) + (-3 - 8i) = (-2 - 3) + (5 - 8)i = -5 + (-3)i = -5 - 3i.$$

$$4. (-3 + \sqrt{2}i) + (-\sqrt{3} - 5i) = (-3 - \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 5)i.$$

$$5. \frac{1}{4} + \frac{1}{3}i - \frac{1}{2} - \frac{5}{6}i = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right)i = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i.$$

Observații. 1° Elementul $x + yi$ reprezintă suma dintre elementul $x + 0i$, care se identifică cu numărul real x și elementul $0 + yi = yi$. Într-adevăr:

$$(x + 0i) + (0 + yi) = (x + 0) + (0 + y)i = x + yi.$$

2°. Din modul în care s-a definit adunarea în C se constată că aceasta se efectuează analog cu adunarea a două binoame în corpul numerelor reale.

Într-adevăr, dacă în corpul numerelor reale vrem să efectuăm adunarea $(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i)$, procedăm astfel:

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) &= x_1 + y_1i + x_2 + y_2i = \\ &= x_1 + x_2 + y_1i + y_2i = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \text{ (am deschis parantezele} \\ &\text{și am dat în factor comun pe } i\text{).} \end{aligned}$$

Această observație ne permite să scriem termenii sumei fără paranteze.

De exemplu, în loc de $(2 + 3i) + (5 + 7i)$ vom scrie $2 + 3i + 5 + 7i$ sau, în loc de $(2 - 7i) + (-5 - 17i)$, vom scrie $2 - 7i - 5 - 17i$.

3°. Suma a două numere reale, în C , este aceeași cu suma lor în corpul numerelor reale.

Într-adevăr, dacă $x_1 \in R$ și $x_2 \in R$, pentru a calcula suma lor în C trebuie să considerăm forma $x_1 = x_1 + 0i$ și $x_2 = x_2 + 0i$ și avem:

$$x_1 + x_2^1 = (x_1 + 0i) + (x_2 + 0i) = (x_1 + x_2) + (0 + 0)i = \\ = (x_1 + x_2) + 0i = x_1 + x_2^2$$

4°. În cazul cînd partea reală este 0 sau coeficientul părții imaginare este 0, partea reală, respectiv partea imaginară, nu se mai scrie, deși adunarea se face în mulțimea C .

Exemple:

1. $3 + (5 - 8i) = (3 + 0i) + (5 - 8i) = 8 - 8i$ sau direct, fără a mai folosi parantezele, $3 + 5 - 8i = 8 - 8i$.

2. $5i + (3 - 8i) = (0 + 5i) + (3 - 8i) = 3 - 3i$ sau direct, fără a mai folosi parantezele, $5i + 3 - 8i = 3 - 3i$.

Înmulțirea în C

Fie $z_1 = x_1 + y_1i$ și $z_2 = x_2 + y_2i$ două elemente din C . Definim produsul acestora prin formula:

$(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$, unde operațiile cu numerele reale x_1, x_2, y_1, y_2 indicate la partea reală și coeficientul părții imaginare ale rezultatului trebuie înțelese în sensul operațiilor din corpul numerelor reale.

Se vede că produsul a două elemente de forma $x + yi$ este tot un element de această formă.

Exemple:

$$1. (2 + 3i)(4 + 5i) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5) + (2 \cdot 5 + 3 \cdot 4)i = (8 - 15) + \\ + (10 + 12)i = -7 + 22i.$$

$$2. \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{3}i\right)\left(7 - \frac{5}{2}i\right) = \left[\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 7 - \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)\right] + \\ + \left[\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{5}{3} \cdot 7\right]i = \left(-\frac{7}{4} + \frac{25}{6}\right) + \left(\frac{35}{3} + \frac{5}{8}\right)i = \frac{29}{12} + \frac{295}{24}i.$$

Observații.

1°. Elementul yi reprezintă produsul dintre elementul $y + 0i$ care se identifică cu numărul real y și elementul $i = 0 + 1 \cdot i$. Într-adevăr:

$$(y + 0 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = (y \cdot 0 - 0 \cdot 1) + (y \cdot 1 + 0 \cdot 0)i = 0 + yi = yi.$$

$$2°. i^2 = -1.$$

$$\text{Într-adevăr, } i^2 = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + \\ + 0 \cdot 1)i = -1 + 0i = -1.$$

În C există un element al cărui pătrat este -1 , și anume elementul i .

3°. Din modul cum s-a definit înmulțirea în C , se constată că aceasta se efectuează analog cu înmulțirea a două binoame, iar acolo unde apare i^2

¹ Aici semnul $+$ se referă la adunarea în C .

² Aici semnul $+$ se referă la adunarea în R .

se pune -1 . Într-adevăr, dacă în corpul numerelor reale vrem să efectuăm înmulțirea $(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)$, procedăm astfel:

$(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = x_1x_2 + x_1y_2i + x_2y_1i + y_1y_2i^2$ și înlocuind pe i^2 cu -1 avem:

$$(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Această observație ne permite să calculăm produsul a două numere complexe, făcând produsul ca în corpul numerelor reale și înlocuind pe i^2 cu -1 .

Exemple:

$$1. (2 + 3i)(4 + 5i) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 4i + 3 \cdot 5i^2 = \\ = 8 - 15 + 10i + 12i = -7 + 22i.$$

$$2. (3 - 2i)(2 - 3i) = 6 - 9i - 4i + 6i^2 = 0 - 13i = -13i.$$

4°. Înmulțirea unui număr real cu un element de forma $x + yi$ se face analog cu înmulțirea unui monom cu un binom. Într-adevăr,

$$x_1(x_2 + y_2i) = (x_1 + 0i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - 0y_2) + (x_1y_2 + 0x_2)i = x_1x_2 + x_1y_2i.$$

Exemple:

$$1. 3(4 + 5i) = 12 + 15i.$$

$$2. -8(3 - 5i) = -24 + 40i.$$

5°. Înmulțirea unui element de forma $0 + y_1i = y_1i$ cu elementul $x_2 + y_2i$ se face analog cu înmulțirea unui monom cu un binom și punându-se în loc de i^2 , -1 .

Într-adevăr:

$$y_1i(x_2 + y_2i) = (0 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (0 \cdot x_2 - y_1y_2) + (0 \cdot y_2 + y_1x_2)i = \\ = -y_1y_2 + y_1x_2i \text{ și făcând înmulțirea, după regulile din corpul nume-} \\ \text{relor reale, obținem:}$$

$$y_1i(x_2 + y_2i) = y_1x_2i + y_1y_2i^2 = y_1x_2i - y_1y_2 = -y_1y_2 + y_1x_2i$$

Exemple:

$$1. 3i(2 + 5i) = 6i + 15i^2 = 6i - 15 = -15 + 6i$$

$$2. -8i(2 - 3i) = -16i + 24i^2 = -16i - 24 = -24 - 16i.$$

6°. Produsul a două numere reale, în C , este același ca în corpul numerelor reale.

Într-adevăr:

$$x_1 \cdot x_2^1 = (x_1 + 0i) \cdot (x_2 + 0i) = (x_1 \cdot x_2 - 0 \cdot 0) + (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0)i = \\ = x_1 \cdot x_2 + 0 \cdot i = x_1 \cdot x_2.^2$$

Mulțimea C a tuturor elementelor scrise sub forma $x + yi$, înzestrată cu cele două operații (adunarea și înmulțirea) definite mai înainte, se numește mulțimea numerelor complexe, iar fiecare element al mulțimii C se numește număr complex.

¹ Aici semnul „ $\cdot$ ” reprezintă semnul înmulțirii în C .

² Aici semnul „ $\cdot$ ” reprezintă semnul înmulțirii în R .

Teoremă. Operațiile de adunare și înmulțire, definite mai înainte în mulțimea numerelor complexe C , determină pe C o structură de corp.

Fie $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ și $z_3 = x_3 + y_3i$, trei numere complexe arbitrare.

Proprietăți ale adunării

A_1 . Adunarea este asociativă, adică:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

Într-adevăr, $(z_1 + z_2) + z_3 = [(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i)] + (x_3 + y_3i) = [(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i] + (x_3 + y_3i) = [(x_1 + x_2) + x_3] + [(y_1 + y_2) + y_3]i$. iar $z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1 + y_1i) + [(x_2 + y_2i) + (x_3 + y_3i)] = (x_1 + y_1i) + [(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)i] = [x_1 + (x_2 + x_3)] + [y_1 + (y_2 + y_3)]i$.

Adunarea numerelor reale fiind asociativă, avem:

$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ și $(y_1 + y_2) + y_3 = y_1 + (y_2 + y_3)$ și deci $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

A_2 . Adunarea este comutativă, adică:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

Într-adevăr, $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, iar $z_2 + z_1 = (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)i$, și folosind proprietatea de comutativitate a adunării numerelor reale, deducem $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

A_3 . Numărul complex $0 = 0 + 0i$ este element neutru pentru adunare, adică, oricare ar fi numărul complex $z = x + yi$, avem:

$$0 + z = z + 0 = z.$$

Într-adevăr, $0 + z = (0 + 0i) + (x + yi) = (0 + x) + (0 + y)i = x + yi = z$.

La fel se arată că $z + 0 = z$.

A_4 . Orice număr complex $z = x + yi$ admite un opus, și anume numărul complex $-x - yi$, notat $-z$.

Într-adevăr, $z + (-z) = (x + yi) + (-x - yi) = (x - x) + (y - y)i = 0 + 0i = 0$. La fel se arată că $(-z) + z = 0$.

Notății. În loc de $z_1 + (-z_2)$ scriem $z_1 - z_2$ și citim diferența dintre numărul complex z_1 și z_2 .

La fel:

$$(-z_1) + z_2 = -z_1 + z_2,$$

$$(-z_1) + (-z_2) = -z_1 - z_2.$$

Proprietăți ale înmulțirii

M_1 . Înmulțirea este asociativă, adică:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$

$$\begin{aligned} \text{Într-adevăr, } (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= [(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)](x_3 + y_3 i) = \\ &= [(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i](x_3 + y_3 i) = (x_1 x_2 x_3 - x_3 y_1 y_2 - x_1 y_2 y_3 - \\ &\quad - x_2 y_1 y_3) + (x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 + x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3) i, \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (x_1 + y_1 i)[(x_2 + y_2 i)(x_3 + y_3 i)] = (x_1 + y_1 i)[(x_2 x_3 - y_2 y_3) + \\ &\quad + (x_2 y_3 + x_3 y_2) i] = (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3 - x_3 y_1 y_2) + (x_1 x_2 y_3 + \\ &\quad + x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 - y_1 y_2 y_3) i. \end{aligned}$$

Din compararea celor două rezultate deducem:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

M_2 . Elementul $1 = 1 + 0i$ este element neutru pentru înmulțire, adică, oricare ar fi numărul complex $z = x + yi$, avem:

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

$$\begin{aligned} \text{Într-adevăr, } z \cdot 1 &= (x + yi)(1 + 0i) = (x \cdot 1 - y \cdot 0) + (x \cdot 0 + y \cdot 1)i = \\ &= x + yi = z. \end{aligned}$$

La fel se arată că $1 \cdot z = z$.

M_3 . Orice număr complex $z = x + yi$, diferit de 0, admite un invers notat cu $\frac{1}{z}$ și egal cu $\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot i$.

$$\begin{aligned} \text{Într-adevăr, } z \cdot \frac{1}{z} &= (x + yi) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i \right) = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{xy - xy}{x^2 + y^2} \right) i = 1 + 0i = 1. \end{aligned}$$

La fel se arată că $\frac{1}{z} \cdot z = 1$.

Modul cum se obține forma numărului complex $\frac{1}{z}$ va fi arătat mai târziu.

În loc de $z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$) vom scrie $\frac{z_1}{z_2}$ și vom citi cîtușul dintre numărul complex z_1 și z_2 .

M_4 . Înmulțirea este comutativă, adică:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

Această proprietate rezultă din egalitățile:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i,$$

$$z_2 \cdot z_1 = (x_2x_1 - y_2y_1) + (x_2y_1 + x_1y_2)i = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Proprietăți de legătură între adunare și înmulțire

AM. *Înmulțirea este distributivă la stînga și la dreapta față de adunare, adică:*

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \text{ și}$$

$$(z_2 + z_3) \cdot z_1 = z_2 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_1.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (x_1 + y_1 i) [(x_2 + y_2 i) + (x_3 + y_3 i)] = (x_1 + y_1 i) \times \\ &\times [(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)i] = (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3) + (x_2y_1 + x_3y_1 + \\ &+ x_1y_2 + x_1y_3) i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{și } z_1z_2 + z_1z_3 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) + (x_1 + y_1 i)(x_3 + y_3 i) = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 + x_1x_3 - y_1y_3) + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1)i. \end{aligned}$$

Din compararea celor două rezultate deducem distributivitatea la stînga.

La fel se procedează pentru demonstrarea distributivității la dreapta.

Așadar, mulțimea C , a numerelor complexe, notate sub forma $x + yi$, unde x și y sînt numere reale, formează corp, corpul numerelor complexe.¹

Să verificăm că acest corp este chiar corpul pe care ne-am propus să-l construim la începutul acestui paragraf.

a) Corpul numerelor complexe conține toate numerele reale, deoarece de la început am pus $x = x + 0i$, unde x este un număr real.

b) Operațiile cu numerele reale în corpul numerelor complexe se fac la fel ca în corpul numerelor reale (observația 3° de la adunare și observația 6° de la înmulțire).

c) Corpul C conține elementul i , astfel încît $i^2 = -1$ (observația 2° de la înmulțire).

Deoarece numerele complexe formează corp, regulile de calcul cunoscute de la numere reale sînt aplicabile și la numere complexe.

Dintre acestea menționăm:

a) $z_1 \cdot z_2 = 0 \iff z_1 = 0 \text{ sau } z_2 = 0.$

b) Regula semnelor la înmulțire.

c) Calculul cu puteri.

d) Formulele de calcul prescurtat.

e) Calculul cu fracții, în particular simplificarea și amplificarea.

¹ Proprietatea M_4 arată că acest corp este comutativ.

Puterile naturale ale numărului i

Aplicând regulile de calcul cu puteri și înlocuind i^2 cu -1 , obținem:

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, \\ i^5 = i^4 \cdot i = i \text{ etc.}$$

$$\text{În general, } i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1, i^{4n+1} = (i^4)^n \cdot i = i, i^{4n+2} = (i^4)^n \cdot i^2 = -1, \\ i^{4n+3} = (i^4)^n \cdot i^3 = -i \quad (n \in \mathbb{N}),$$

Alte exemple:

$$i^{324} = (i^2)^{162} = (-1)^{162} = 1,$$

$$i^{362} = (i^2)^{181} = (-1)^{181} = -1,$$

$$i^{53} = i^{52} \cdot i = (i^2)^{26} \cdot i = (-1)^{26} \cdot i = i,$$

$$i^{103} = i^{102} \cdot i = (i^2)^{51} \cdot i = (-1)^{51} \cdot i = -i.$$

Numere complexe conjugate

Fie numărul complex $z = x + yi$. Numărul complex $x - yi$ se notează cu $\bar{z}$ și se numește *conjugatul numărului complex* z . Se vede că, pentru a obține conjugatul unui număr complex, menținem partea reală și schimbăm semnul coeficientului părții imaginare.

$$\text{Așadar, } \overline{x + yi} = x - yi.$$

Exemple:

$$z = 3 + 5i,$$

$$\bar{z} = 3 - 5i$$

$$z = -2 + 3i,$$

$$\bar{z} = -2 - 3i$$

$$z = 1 - 5i,$$

$$\bar{z} = 1 + 5i$$

$$z = 7i,$$

$$\bar{z} = -7i$$

Conjugatul unui număr real coincide cu numărul respectiv. (Dacă $z = x + 0i$, $\bar{z} = x - 0i = x = z$.)

1) Avem:

$z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x$ și deci suma a două numere complexe conjugate este un număr real.

2) Avem:

$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$ și deci produsul a două numere complexe conjugate este un număr real.

Scrierea unui cit de numere complexe sub forma $x + yi$.

Fie citul $\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i}$. Studiem trei cazuri:

a) $x_2 \neq 0, y_2 = 0$; b) $x_2 = 0, y_2 \neq 0$; c) $x_2 \neq 0, y_2 \neq 0$.

a) Dacă $y_2 = 0$, ($x_2 \neq 0$), citul capătă forma $\frac{x_1 + y_1 i}{x_2}$.

În acest caz avem: $\frac{x_1 + y_1 i}{x_2} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{x_2} i$.

Exemple:

$$\frac{2 + 5i}{3} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} i,$$

$$\frac{-3 - 7i}{3} = -\frac{3}{3} - \frac{7}{3} i = -1 - \frac{7}{3} i.$$

b) Dacă $x_2 = 0$ și $y_2 \neq 0$ avem forma $\frac{x_1 + y_1 i}{y_2 i}$. În acest caz se amplifică cu i și se reduce problema la cazul anterior.

$$\text{Avem: } \frac{x_1 + y_1 i}{y_2 i} = \frac{x_1 i + y_1 i^2}{y_2 i^2} = \frac{-y_1 + x_1 i}{-y_2} = \frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{y_2} i.$$

Exemple:

$$\frac{2 + 5i}{3i} = \frac{2i + 5i^2}{3i^2} = \frac{-5 + 2i}{-3} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} i,$$

$$\frac{4 - 6i}{2i} = \frac{4i - 6i^2}{2i^2} = \frac{4i + 6}{-2} = -3 - 2i.$$

c) Dacă $x_2 \neq 0$ și $y_2 \neq 0$, se amplifică cu conjugatul numitorului, pentru a transforma numitorul într-un număr real.

Avem

$$\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (-x_1 y_2 + x_2 y_1)i}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Exemple:

$$\frac{2 + i}{2 - i} = \frac{(2 + i)^2}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{3 + 4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} i,$$

$$\frac{5}{-3 - 2i} = \frac{5(-3 + 2i)}{(-3 - 2i)(-3 + 2i)} = \frac{-15 + 10i}{13} = -\frac{15}{13} + \frac{10}{13} i.$$

Inversul unui număr complex

Pentru a calcula inversul unui număr complex se procedează ca în cazul citului (numărătorul este în acest caz 1).

Exemple:

$$1. \text{ Fie } z = 3i, \frac{1}{z} = \frac{1}{3i} = \frac{i}{3i^2} = -\frac{1}{3} i.$$

$$2. \text{ Fie } z = yi, \frac{1}{z} = \frac{1}{yi} = \frac{i}{yi^2} = \frac{i}{-y} = -\frac{1}{y} i.$$

$$3. \text{ Fie } z = 3 - 5i, \frac{1}{z} = \frac{1}{3 - 5i} = \frac{3 + 5i}{(3 - 5i)(3 + 5i)} = \\ = \frac{3 + 5i}{9 + 25} = \frac{3 + 5i}{34} = \frac{3}{34} + \frac{5}{34} i.$$

$$4. \text{ Fie } z = x + yi, \frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \\ = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i.$$

Ridicarea la putere a unui număr complex

Pentru a ridica la o putere numărul complex $z = x + yi$ procedăm, de obicei, ca și cum $x + yi$ ar fi un binom în corpul numerelor reale și apoi înlocuind pe i^2 cu -1 , pe i^3 cu $-i$, cu i^4 cu 1 etc.

Exemple:

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + (yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

$$z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2(yi) + 3x(yi)^2 + (yi)^3 = \\ = x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = \\ = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i.$$

2. CONSTRUCȚIA CORPULUI NUMERELOR COMPLEXE PE BAZA NOȚIUNII DE PERECHE ORDONATĂ DE NUMERE REALE

S-a văzut mai înainte că orice număr complex $x + yi$ este determinat dacă sint date numere reale x și y (partea reală, respectiv, coeficientul părții imaginare). Altfel spus, numărul complex $x + yi$ este determinat dacă se dă perechea ordonată (x, y) de numere reale, în care primul număr este partea reală, iar al doilea este coeficientul părții imaginare.

Această observație permite să construim corpul numerelor complexe bazându-ne pe noțiunea de pereche ordonată de numere reale, renunțând la termenul de element de forma $x + yi$. În acest scop vom identifica „elementele de forma $x + yi$ ” cu perechea ordonată (x, y) .

Toată construcția care urmează se obține înlocuind forma $x + yi$ prin forma (x, y) .

Fie C mulțimea tuturor perechilor ordonate (x, y) de numere reale.

Egalitatea în C . Pentru a introduce noțiunea de egalitate în C ne reamintim că între două elemente $x_1 + y_1i$ și $x_2 + y_2i$ scriem semnul „=” atunci și numai atunci cînd $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$. Înlocuind pe $x_1 + y_1i$ cu (x_1, y_1) și pe $x_2 + y_2i$ cu (x_2, y_2) , ni se sugerează următoarea definiție a egalității perechilor.

Doă perechi ordonate (x_1, y_1) și (x_2, y_2) de numere reale sint egale dacă $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$.

Adunarea în C . Formula $(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ ne sugerează următoarea definiție.

Se numește *suma a două perechi ordonate* (x_1, y_1) și (x_2, y_2) de numere reale perechea ordonată notată cu $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ și definită astfel:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, unde $x_1 + x_2, y_1 + y_2$ sînt sume calculate în corpul numerelor reale.

Înmulțirea în C . Relația $(x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$ ne sugerează următoarea definiție:

Se numește *produsul a două perechi ordonate* (x_1, y_1) și (x_2, y_2) de numere reale perechea ordonată notată cu $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$ și definită astfel:

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$, unde operațiile din membrul drept se fac în corpul numerelor reale.

Mulțimea C a tuturor perechilor ordonate (x, y) de numere reale înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire definite mai înainte se numește *mulțimea numerelor complexe*, iar fiecare pereche ordonată (x, y) de numere reale, cu care se calculează după regulile definite anterior se numește *număr complex*.

Vom menține în continuare denumirea de *parte reală* pentru primul element al perechii și *coeficient al părții imaginare* pentru al doilea element al perechii.

O b s e r v a Ț i e. Să considerăm numerele complexe $(x_1, 0)$ și $(x_2, 0)$.

Avem:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (1)$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2 - 0 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) = (x_1x_2, 0). \quad (2)$$

Așadar, calculele cu numerele complexe la care coeficientul părții imaginare este 0 se reduce la calculul cu părțile reale. Dacă notăm numerele complexe de forma $(x, 0)$ cu x' , atunci relațiile (1) și (2) devin:

$$x'_1 + x'_2 = (x_1 + x_2)',$$

$$x'_1 \cdot x'_2 = (x_1 \cdot x_2)'.$$

E x e m p l e:

$$1. (3, 0) = 3' \quad (5, 0) = 5',$$

$$3' + 5' = (3 + 5)' = 8', \text{ unde } 8' = (8, 0),$$

$$3' \cdot 5' = (3 \cdot 5)' = 15', \text{ unde } 15' = (15, 0).$$

$$2. 4' + 8' = 12',$$

$$4' \cdot 8' = 32'.$$

La aceste exemple s-a văzut că operațiile cu numerele de forma x' se fac la fel ca operațiile cu numere reale, deosebirea constînd numai în faptul că se scrie accentul. Din acest motiv se identifică numerele complexe x' cu numerele reale x și uneori pentru simplificare nu se mai scrie accentul.

Din acest motiv se spune că mulțimea numerelor complexe de forma $(x, 0)$ în care se consideră adunarea și înmulțirea definite mai înainte este o submulțime a numerelor complexe, *izomorfă* cu corpul numerelor reale.

Corpul numerelor complexe

Vom arăta că mulțimea numerelor complexe C formează corp. Pentru aceasta va trebui să verificăm toate proprietățile caracteristice structurii de corp. În acest scop vom refăce toate calculele de la construcția anterioară bazată pe forma $x + yi$, înlocuind această formă cu forma (x, y) . Ca exemplu vom da numai demonstrația asociativității înmulțirii și pentru a urmări mai bine analogia vom face calculele în paralel.

Fie $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $z_3 = x_3 + y_3 i$.

Avem:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (x_1 + y_1 i) [(x_2 + y_2 i)(x_3 + y_3 i)] = (x_1 + y_1 i) [(x_2 x_3 - y_2 y_3) + (x_2 y_3 + x_3 y_2) i] = (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3 - x_3 y_1 y_2) + (x_1 x_2 y_3 + x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 - y_1 y_2 y_3) i.$$

$$(z_1 \cdot z_2) z_3 = [(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)](x_3 + y_3 i) = [(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i](x_3 + y_3 i) = (x_1 x_2 x_3 - x_3 y_1 y_2 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3) + (x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1) i.$$

Se vede că:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3.$$

Elementul neutru la adunare este perechea $(0, 0)$ (corespunzătoare lui $0 + 0i$).
Avem: $(0, 0) = 0'$.

Elementul neutru la înmulțire este perechea $(1, 0)$ (corespunzător lui $1 + 0i$).
Avem: $(1, 0) = 1'$.

Opusul numărului complex (x, y) este $(-x, -y)$.

Inversul numărului complex (x, y) este $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$.

Forma canonică a numărului complex (x, y)

În construcția corpului numerelor complexe pe bază de perechi de numere reale n-a apărut pînă acum numărul complex i , care a jucat un rol mare în construcția anterioară unde $i = 0 + 1i$. Ni se sugerează următoarea notație:

$$(0, 1) = i.$$

Avem: $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = (-1)'$.

Așadar, $i^2 = (-1)'$ sau, renunțînd la accent, $i^2 = -1$.

Pentru a obține forma canonică a unui număr complex, observăm că:

$$(x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (x, 0) + (0, y) = (x, y), \text{ adică:}$$

$$(x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1). \text{ Folosind notațiile introduse, ultima relație devine:}$$

$$(x, y) = x' + y' \cdot i \text{ sau, renunțînd la accente:}$$

$(x, y) = x + yi$. Această formă a numărului complex (x, y) se mai numește forma canonică și importanța ei constă în aceea că permite să se reducă calculul cu perechi (x, y) la calculul cu elemente de forma $x + yi$, care este mai comod.

Fie $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, $z_3 = (x_3, y_3)$

Avem:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (x_1, y_1) [(x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) (x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2) = (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3 - x_3 y_1 y_2, x_1 x_2 y_3 + x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 - y_1 y_2 y_3).$$

$$(z_1 z_2) \cdot z_3 = [(x_1, y_1) (x_2, y_2)] (x_3, y_3) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) (x_3, y_3) = (x_1 x_2 x_3 - x_3 y_2 y_1 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3, x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1).$$

Se vede că:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3.$$

**Descompuneri în factori
în corpul numerelor complexe**

Se știe că în corpul numerelor reale expresia $x^2 + a^2$ (unde x și a sînt numere reale) nu poate fi descompusă în factori.

În corpul numerelor complexe avem:

$$x^2 + a^2 = x^2 - (ai)^2 = (x + ai)(x - ai).$$

3. ECUAȚIA DE GRADUL DOI CU COEFICIENȚI REALI REZOLVATĂ ÎN CORPUL NUMERELOR COMPLEXE

1) *Ecuatia de formă $x^2 = a$ ($a \in R$).*

Se știe că în corpul numerelor reale ecuația $x^2 = a$ nu are soluții decît dacă $a \geq 0$, deoarece pătratul oricărui număr real este un număr pozitiv.

În cazul $a \geq 0$, soluțiile ecuației $x^2 = a$ sînt $x_{1,2} = \pm \sqrt{a}$ (soluțiile sînt două numere reale opuse).

Vom arăta acum că în corpul numerelor complexe ecuația $x^2 = a$ are soluții și în cazul $a < 0$.

Fie ecuația $x^2 = -b$ (unde $b > 0$).

Avem:

$$\begin{aligned} x^2 = -b &\Leftrightarrow x^2 + b = 0 \Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{b})^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (i\sqrt{b})^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - i\sqrt{b})(x + i\sqrt{b}) = 0 \Leftrightarrow (x - i\sqrt{b} = 0 \text{ sau } x + i\sqrt{b} = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = i\sqrt{b} \text{ sau } x = -i\sqrt{b}). \end{aligned}$$

În corpul numerelor complexe, soluțiile ecuației $x^2 = -b$ (unde $b > 0$) sînt numerele complexe opuse $i\sqrt{b}$ și $-i\sqrt{b}$. Notînd rădăcinile cu x_1 și x_2 , scriem $x_{1,2} = \pm i\sqrt{b}$.

E x e m p l e:

1. $x^2 = -5$, $x_{1,2} = \pm i\sqrt{5}$.
2. $x^2 = -4$, $x_{1,2} = \pm i\sqrt{4} = \pm 2i$.
3. $x^2 = -1$, $x_{1,2} = \pm i\sqrt{1} = \pm i$.
4. $4x^2 + 81 = 0$, $\Leftrightarrow x^2 = -\frac{81}{4}$, $x_{1,2} = \pm \frac{9}{2}i$.

2) *Ecuatia de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$, în cazul $\Delta < 0$ (coeficienții sînt reali).*

Se știe că ecuația de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$ în cazul $\Delta \geq 0$ are

rădăcinile x_1 și x_2 date de formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$.

În cazul cînd $\Delta < 0$, ecuația de gradul doi nu are soluții în corpul numerelor reale, dar vom arăta că aceasta are soluții în corpul numerelor complexe.

Se știe că ecuația de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$ poate fi adusă la forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \text{ sau, înlocuind pe } b^2 - 4ac \text{ cu } \Delta,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} = 0.$$

Deoarece $\Delta < 0$, numărul $-\Delta$ va fi pozitiv și vom avea $-\Delta = (\sqrt{-\Delta})^2$.

Deci putem pune ecuația sub forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0.$$

În corpul numerelor complexe, avem:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0 &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \\ \text{sau } x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ sau } x = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

Notînd cu x_1 și x_2 rădăcinile ecuației, putem scrie

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad (\Delta = b^2 - 4ac).$$

Dacă $b = 2b'$, obținem formula

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm i\sqrt{-\Delta'}}{a}, \quad (\Delta' = b'^2 - ac).$$

Observăm că soluțiile $x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ și $x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sînt numere complexe conjugate.

Deci, în cazul $\Delta < 0$ rădăcinile ecuației de gradul doi cu coeficienți reali sînt numere complexe conjugate.

Exemple:

$$1. \quad x^2 - x + 1 = 0,$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3,$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$2. x^2 - 2x + 5 = 0,$$

$$\Delta' = 1 - 5 = -4,$$

$$x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{4} = 1 \pm 2i \quad (x_1 = 1 + 2i, x_2 = 1 - 2i).$$

$$3. 4x^2 - 4x + 2 - a = 0,$$

$$\Delta' = 4 - 8 + 4a = -4 + 4a = 4(a - 1).$$

Dacă $\Delta' \geq 0$, adică $a \geq 1$, sîntem în cazul rădăcinilor reale și avem:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4(a-1)}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{a-1}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{a-1}}{2}.$$

Dacă $\Delta' < 0$, adică $a < 1$, sîntem în cazul cînd avem rădăcini complexe. Deoarece $-\Delta' = 4(1 - a)$, în acest caz avem:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4(1-a)}}{4} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{1-a}}{4} = \frac{1 \pm i\sqrt{1-a}}{2}.$$

Relații între coeficienți și rădăcini

În cazul $\Delta \geq 0$, avem:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Dacă $\Delta < 0$, avem:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \left(-\frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Așadar, indiferent de semnul lui Δ , avem relațiile:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

formule care exprimă suma și produsul rădăcinilor în funcție de coeficienții ecuației.

Formarea unei ecuații de gradul doi cu coeficienți reali cînd se cunoaște suma și produsul rădăcinilor (în cazul rădăcinilor complexe, trebuie alese astfel încît să fie complexe conjugate).

Oricare ar fi semnul lui Δ , avem:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Așadar, pentru a forma ecuația de gradul doi în x cu rădăcinile date x_1 și x_2 , se calculează suma și produsul rădăcinilor și se scrie ecuația sub forma

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Exemplu:

Să se scrie ecuația de gradul doi având rădăcinile $x_1 = 3 + 2i$ și $x_2 = 3 - 2i$.

Avem: $x_1 + x_2 = 6$,

$$x_1x_2 = (3 + 2i)(3 - 2i) = 9 + 4 = 13.$$

Ecuația de gradul doi având aceste rădăcini este $x^2 - 6x + 13 = 0$.

4. ECUAȚIA BIPĂTRATĂ

Se numește ecuație bipătrată cu necunoscute x orice ecuație echivalentă cu o ecuație de forma:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$, unde literele a, b, c reprezintă constante ($a \in R, b \in R, c \in R$, și $a \neq 0$). A rezolva această ecuație în corpul numerelor complexe, înseamnă a determina mulțimea $\{x \in C \mid ax^4 + bx^2 + c = 0\}$. Pentru rezolvarea ecuației bipătrate $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Se înlocuiește x^2 cu o literă, de exemplu y . Obținem astfel ecuația de gradul doi $ay^2 + by + c = 0$, cu soluțiile y_1 și y_2 . Ținând seama că $x^2 = y$, obținem $x^2 = y_1$ și $x^2 = y_2$, ecuații de gradul doi în necunoscuta x .

Cînd y_1 și y_2 sînt pozitivi, ecuația bipătrată are 4 rădăcini reale, numere opuse două cite două. La o soluție y_1 sau y_2 negativă vor corespunde soluții complexe pentru ecuația bipătrată.

Exemplu:

Să se rezolve ecuația bipătrată:

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0.$$

Punînd $x^2 = y$, obținem $y^2 - 5y - 36 = 0$. Rezolvînd această ecuație obținem:

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \text{ și deci } y_1 = -4; y_2 = 9.$$

Înlocuind aceste valori în relația $x^2 = y$, căpătăm ecuațiile care rezolvate dau soluțiile ecuației bipătrate:

$$x^2 = -4 \text{ și } x^2 = 9.$$

Ecuația (1) are deci soluțiile $x_{1,2} = \pm 2i$, $x_{3,4} = \pm 3$.

Așadar, soluțiile ecuației date sînt:

$$x_1 = 2i, x_2 = -2i, x_3 = 3, x_4 = -3.$$

EXERCITII

1. Să se efectueze adunările:

a) $(3 + 2i) + (2 + 4i); \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}i\right);$

b) $(0,5 - 4,5i) + (-2,5 - 1,5i);$

c) $(3x - 4yi) + (-3x - 7yi);$

d) $(1 + i) + (-3 + 2i) + (6 - 3i); (0,12 - 1,4i) + (1,08 + 0,4i) + (2,5 - 0,2i);$

e) $5 + 4i - (2 - 3i); 3 + 2i + 5 - 7i;$

f) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i - \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}i\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}i\right);$

g) $(2a - 3bi) + (-a - bi) + (4a + 2bi) - (2a - 5bi);$
 $5x - 3yi - 3x + 8yi - [(2x - yi) - (7x - 2yi)];$
 $2c - 8di - [(5c - 2di) + (c - di) - (-4c + 3di)].$

2. Să se efectueze înmulțirile:

a) $(6 + i)(5 + 2i); \left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(-\frac{1}{4} + 5i\right); \left(-\frac{1}{4} - 5i\right)\left(-\frac{1}{2} - 6i\right);$

b) $(3 + 2i)(3 - 2i); (a^2 + bi)(a^2 - bi); (a + i\sqrt{b})(a - i\sqrt{b});$

c) $6(2 - 3i); 5i(-2 - 3i); \frac{1}{4}i(5 - 2i).$

3. Să se verifice egalitatea $i^7 + i^{18} + i^{25} + i^{35} + i^{97} + i^{100} = 0$.

4. Să se calculeze:

$$(-i)^{10}; (-i)^{31}; (-i)^{54}.$$

5. Să se scrie sub forma $x + yi$ următoarele citiri de numere complexe:

a) $\frac{3 + 5i}{7}; \frac{-1 - 4i}{4}; \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i}{\frac{1}{2}}; b) \frac{-5 - 3i}{2i}; \frac{2 - 8i}{i}; \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}i}{\frac{1}{2}};$

c) $\frac{5 + 2i}{1 - 2i}; \frac{7 - 3i}{1 + 3i}; \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}; d) \frac{a}{a + bi}; \frac{\sqrt{a}}{a + 2i\sqrt{a}}; \frac{a + i\sqrt{b}}{a - i\sqrt{b}};$

6. Să se calculeze:

a) $(1 + i)^2; (1 - i)^2; (3 + 2i)^2; (5 - 2i)^2;$

b) $(1 + 2ai)^2; [(a - b) + (a + b)i]^2; c) \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2; \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2;$

$$d) (1+i)^3; (1-i)^3; (2+i\sqrt{3})^3; (3-i\sqrt{3})^3; \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3;$$

$$e) \left(\frac{3+2i}{3-2i}\right)^3; \left(\frac{5+7i}{i}\right)^3 \quad f) (1+i)^4; (2-i)^4;$$

$$g) (1+i)^2 (1-i)^2 + (3+2i)^2 (3-2i)^2.$$

7. Să se descompună în factori, în corpul numerelor complexe, următoarele expresii:

$$a) x^2 + 2y^2. \quad b) 4x^2 + 9y^2. \quad c) (x+1)^2 + 1.$$

8. Să se demonstreze relațiile:

$$a) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{și} \quad b) \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}. \quad (\text{În particular, } \overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}, \text{ dacă } \alpha \in \mathbb{R}).$$

9. Să se demonstreze relațiile:

$$\overline{z^2} = (\overline{z})^2, \quad \overline{z^3} = (\overline{z})^3, \dots, \overline{z^n} = (\overline{z})^n. \quad (\text{Se va folosi rezultatul de la exercițiul 8, b.})$$

10. Să se demonstreze relațiile:

$$\overline{az^2 + bz + c} = a\overline{z}^2 + b\overline{z} + c \quad (\text{unde } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}),$$

$$\overline{az^3 + bz^2 + cz + d} = a\overline{z}^3 + b\overline{z}^2 + c\overline{z} + d \quad (\text{unde } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}).$$

11. Să se rezolve ecuațiile:

$$x^2 + 16 = 0; \quad 9x^2 + 25 = 0; \quad 4x^2 = -125; \quad (a^2 + 2a + 1)x^2 + b^2 = 0.$$

12. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) x^2 - 4x + 29 = 0; \quad x^2 - 6x + 11 = 0; \quad x^2 - 2\sqrt{6}x + 8 = 0.$$

$$b) 4x^2 - 8x + 5 = 0.$$

13. Să se rezolve ecuațiile următoare în corpul numerelor complexe:

$$a) x^3 - 5 = 0.$$

$$b) x^3 - 1 = 0; \quad x^3 - 8 = 0; \quad x^3 - \frac{8}{27} = 0; \quad 8x^3 - 125 = 0.$$

$$c) x^3 + 1 = 0; \quad x^3 + 8 = 0; \quad 8x^3 + 125 = 0.$$

14. Să se formeze ecuațiile de gradul doi în x , având rădăcinile:

$$a) x_1 = 2 + i\sqrt{3}, \quad x_2 = 2 - i\sqrt{3}, \quad b) x_1 = 3 - \frac{1}{2}i, \quad x_2 = 3 + \frac{1}{2}i,$$

$$c) x_1 = \frac{-1 + 4i\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - 4i\sqrt{5}}{2}, \quad d) x_1 = \frac{1-i}{1+i}, \quad x_2 = i.$$

15. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) x^4 + 21x^2 - 100 = 0; \quad b) x^4 + 10x^2 + 9 = 0;$$

$$c) 5x^4 - 8x^2 = 4 - 7x^4; \quad d) abx^4 - (a^2 + b^2)x^2 + ab = 0 \quad (a > 0, b > 0)$$

1. ECUAȚIA DE GRADUL DOI CU DOUĂ SAU MAI MULTE NECUNOSCUTE CU COEFICIENȚI REALI, REZOLVATĂ ÎN CORPUL NUMERELOR COMPLEXE

Se spune că o ecuație este de gradul doi cu două necunoscute x și y , cu coeficienți reali, dacă este echivalentă cu o ecuație de forma

$$\underbrace{ax^2 + bxy + cy^2}_{\text{Termeni de gr. II}} + \underbrace{dx + ey}_{\text{Termeni de gr. I}} + \underbrace{f}_{\text{Termen liber}} = 0, \text{ unde } a \in R,$$

$b \in R, c \in R, d \in R, e \in R, f \in R$ și cel puțin unul dintre coeficienții a, b, c este diferit de 0.

Rezolvarea ecuației. A rezolva ecuația de gradul doi, în corpul numerelor complexe, înseamnă a afla toate perechile (x, y) de numere complexe care satisfac egalitatea $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Aceste perechi se numesc *soluțiile ecuației*.

Deci, rezolvarea ecuației în corpul numerelor complexe se reduce la determinarea mulțimii:

$$\{(x, y), x \in C, y \in C \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}.$$

Soluțiile ecuației. Pentru a afla o soluție a ecuației se dă o valoare, de exemplu lui x , și se află valoarea corespunzătoare a lui y (se poate proceda și invers). Cum x poate lua o infinitate de valori, obținem în general, o infinitate de soluții (x, y) ale ecuației.

Exemplu:

Fie ecuația $2x^2 - 3xy + y^2 + 5x - 3 = 0$.

Aflarea unor soluții particulare

Fie $x = 0$. Obținem ecuația în y , $y^2 - 3 = 0$, cu rădăcina $y = \pm \sqrt{3}$.

Am aflat astfel: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$ și $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$.

Deci am obținut soluțiile $(0, \sqrt{3})$ și $(0, -\sqrt{3})$.

Fie $y = 0$. Obținem:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0,$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49, \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Am aflat astfel soluțiile $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$ și $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ sau scrise

ca perechi:

$$(0, -3) \text{ și } \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Fie $x = 1$. Obținem: $y^2 - 3y + 4 = 0$,

$$\Delta = 9 - 16 = -7 \quad y_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i.$$

Deci am obținut soluțiile $\left(1, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i\right)$ și $\left(1, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i\right)$.

În cazul ecuațiilor de gradul doi cu trei necunoscute x, y, z se procedează la fel, căutându-se sistemele ordonate de trei numere complexe x, y, z care satisfac ecuația dată. Aceasta se calculează dând valori la două dintre necunoscute și determinându-se a treia.

Analog, la ecuațiile cu mai multe necunoscute.

2. SISTEME DE ECUAȚII CU COEFICIENȚI REALI REZOLVATE ÎN CORPUL NUMERELOR COMPLEXE

În clasa a VIII-a s-au studiat sistemele de ecuații de gradul întâi cu coeficienți reali.

Acum vom studia sisteme de ecuații cu coeficienți reali conținând și ecuații de grad mai mare.

Sistemele le vom rezolva în corpul numerelor complexe, dar vom da și cazuri când soluțiile le căutăm în corpul numerelor reale.

a) *Sisteme formate dintr-o ecuație de gradul întâi și o ecuație de gradul doi.* În acest caz se folosește metoda substituției: se află o necunoscută, în funcție de cealaltă, din ecuația de gradul întâi și se înlocuiește în ecuația de gradul doi.

Exemplul 1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 2y + 4 = 0. \end{cases}$$

Aflind din prima ecuație pe x în funcție de y și înlocuind în a doua ecuație, obținem sistemul:

$$\begin{cases} x = \frac{7+3y}{2} \\ \frac{2(7+3y)^2}{4} - \frac{3(7+3y)y}{2} + y^2 - \frac{5(7+3y)}{2} + 2y + 4 = 0. \end{cases}$$

În acest sistem, ecuația a doua are o singură necunoscută y .

Făcând calculele, obținem, pe rând, următoarele sisteme echivalente:

$$\begin{cases} x = \frac{7+3y}{2} \\ 49 + 42y + 9y^2 - 21y - 9y^2 + 2y^2 - 35 - 15y + 4y + 8 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7+3y}{2} \\ y^2 + 5y + 11 = 0. \end{cases}$$

Rezolvând ecuația a doua, obținem:

$$y_1 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i, \quad y_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i.$$

Înlocuind aceste valori în ecuația $x = \frac{7+3y}{2}$, obținem:

$$x_1 = \frac{7+3\left(-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i\right)}{2} \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{7+3\left(-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i\right)}{2}.$$

Soluțiile sistemului sînt:

$$\text{I} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{19}}{4}i \\ y_1 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{19}}{4}i \\ y_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i. \end{cases}$$

Soluțiile scrise ca perechi, în care primul element este x , iar al doilea element este y , sînt:

$$\left(-\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{19}}{4}i, -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i\right),$$

$$\left(-\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{19}}{4}i, -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i\right).$$

Observație. Atît prima ecuație cît și cea de-a doua, fiind ecuații cu două necunoscute, admit o infinitate de soluții în corpul numerelor complexe. Soluțiile sistemului sînt acele soluții care satisfac în același timp atît prima ecuație cît și cea de-a doua.

Exemplul 2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x^2 + 5y^2 - 10x + 4 = 0. \end{cases}$$

Din prima ecuație obținem $y = 1 - 2x$ (preferăm să-l aflăm pe y , deoarece el se exprimă fără fracții) și înlocuind în ecuația a doua, după efectuarea calculelor, ajungem la ecuația $25x^2 - 30x + 9 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = x_2 = \frac{3}{5}$. Pentru determinarea valorii lui y înlocuim pe x cu $\frac{3}{5}$ în ecuația $y = 1 - 2x$ și obținem $y = -\frac{1}{5}$.

Așadar, am obținut soluția

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} \\ y_1 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

care scrisă ca pereche este:

$$\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5} \right).$$

Exemplul 3. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} y = 1 + 2x \\ 8x^2 - 8xy + 2y^2 - 2x + y = 5. \end{cases}$$

Înlocuind pe y cu $1 + 2x$ în ecuația a doua, după calcule și reduceri, obținem egalitatea falsă $3 = 5$.

Sistemul nu are nici o soluție; se mai spune că sistemul este *incompatibil* sau că este *imposibil*.

Exemplul 4. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x = 2y - 3 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y = 3. \end{cases}$$

Înlocuind pe x cu $2y - 3$ în ecuația a doua, obținem: egalitatea $3=3$, deci orice soluție a primei ecuații este soluție și pentru a doua și deci a sistemului.

Soluțiile primei ecuații sînt date de valorile $y = k$, $x = 2k - 3$, unde $k \in \mathbb{C}$.

Sistemul admite o infinitate de soluții de forma

$$\begin{cases} x = 2k - 3 \\ y = k \end{cases} \quad \text{sau}$$

$(2k - 3, k)$, unde $k \in \mathbb{C}$. Se spune că sistemul este *nedeterminat*.

b) *Sisteme de ecuații care se rezolvă prin metoda reducerii.* Metoda este asemănătoare cu aceea folosită la rezolvarea sistemelor de gradul întâi. Dacă, de exemplu, se cere să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 - 3y + 8 = 0 \\ 2x^2 - 10xy + 2y + 10 = 0 \end{cases}$$

observăm că dacă înmulțim ambii membri ai primei ecuații cu -2 și apoi adunăm ecuațiile, se elimină necunoscuta x . Deci una din ecuațiile sistemului poate fi înlocuită cu o ecuație cu singura necunoscută y . Avem:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 - 3y + 8 = 0 \\ 2x^2 - 10xy + 2y + 10 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 10xy - 2y^2 + 6y - 16 = 0 \\ 2x^2 - 10xy + 2y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2 + 8y - 6 = 0 \\ 2x^2 - 10xy + 2y + 10 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 3 = 0 \\ 2x^2 - 10xy + 2y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \text{ sau } y = 3 \\ 2x^2 - 10xy + 2y + 10 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{aligned} &\text{(I)} \begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 - 10xy + 2y + 10 = 0 \end{cases} \\ &\text{(II)} \begin{cases} y = 3 \\ 2x^2 - 10xy + 2y + 10 = 0 \end{cases} \end{aligned} \end{aligned}$$

Pentru a rezolva sistemul (I), înlocuim în ecuația a doua pe y cu 1, obținem:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0 \text{ sau } x^2 - 5x + 6 = 0$$

care are rădăcinile $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Soluțiile sistemului (I) sînt deci:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Pentru a rezolva sistemul (II), înlocuim în ecuația a doua pe y cu 3, obținem:

$$2x^2 - 30x + 16 = 0 \text{ sau } x^2 - 15x + 8 = 0,$$

care are rădăcinile $x_3 = \frac{15 + \sqrt{193}}{2}$, $x_4 = \frac{15 - \sqrt{193}}{2}$.

Soluțiile sistemului II sînt:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{15 + \sqrt{193}}{2} \\ y_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{15 - \sqrt{193}}{2} \\ y_4 = 3 \end{cases}$$

Soluțiile sistemului inițial, scrise ca perechi, sînt:

$$(2,1), (3,1), \left(\frac{15 + \sqrt{193}}{2}, 3\right), \left(\frac{15 - \sqrt{193}}{2}, 3\right).$$

c) *Sisteme de ecuații în care fiecare ecuație are în membrul stîng un polinom omogen de gradul doi, iar în membrul drept o constantă, adică de forma:*

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d'. \end{cases}$$

Vom considera mai întîi cazul $d = 0$

Exemplu:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 3x^2 - 4xy + y^2 = -1. \end{cases}$$

Pentru rezolvare se împarte prima ecuație cu x^2 ($x \neq 0$, căci dacă $x = 0$, înlocuind în prima ecuație, obținem $y = 0$, iar valorile $x = 0$, $y = 0$, nu verifică ecuația a doua).

Avem:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 3x^2 - 4xy + y^2 = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2}{x^2} - \frac{3xy}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = 0 \\ 3x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0 \\ 3x^2 - 4xy + y^2 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Observație. Metoda reducerii se aplică în cazuri particulare. Metoda cea mai utilizată este metoda substituției.

Prima ecuație a sistemului obținut este o ecuație de gradul doi în necunoscuta $\frac{y}{x}$.

Obținem:

$$\frac{y}{x} = 1 \quad \text{și} \quad \frac{y}{x} = 2.$$

Rezolvarea sistemului inițial se reduce la rezolvarea a două sisteme:

$$(I) \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ 3x^2 - 4xy + y^2 = -1 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} \frac{y}{x} = 2 \\ 3x^2 - 4xy + y^2 = -1. \end{cases}$$

Sistemul (I) este imposibil, deoarece din prima ecuație obținem $y = x$ și înlocuind în ecuația a doua obținem egalitatea falsă $0 = -1$.

Sistemul (II) are soluțiile

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2, \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2. \end{cases}$$

Acestea sînt și soluțiile sistemului inițial.

Cazul general ($d \neq 0$, $d' \neq 0$). Acest caz se reduce la cazul precedent, înmulțind ecuațiile astfel încît prin adunarea lor să obținem o ecuație fără termen liber.

Exemplu. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} -4x^2 - 3xy + y^2 = -6 \\ 2x^2 - xy - y^2 = -4. \end{cases}$$

Înmulțind ambii membri ai primei ecuații cu -2 , iar pe cei ai ecuației a doua cu 3 , obținem sistemul:

$$\begin{cases} 8x^2 + 6xy - 2y^2 = 12 \\ 6x^2 - 3xy - 3y^2 = -12, \end{cases}$$

Înlocuim acest sistem printr-un sistem echivalent în care o ecuație este suma celor două ecuații adunate membru cu membru, iar a doua ecuație, una dintre ecuațiile sistemului inițial și avem:

$$\begin{cases} 14x^2 + 3xy - 5y^2 = 0 \\ 2x^2 - xy - y^2 = -4 \end{cases}$$

sistem de forma celui studiat la cazul anterior.

Rezolvarea acestui sistem se reduce la rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 2 \\ 2x^2 - xy - y^2 = -4 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \frac{y}{x} = -\frac{7}{5} \\ 2x^2 - xy - y^2 = -4. \end{cases}$$

Se obțin soluțiile

$$\begin{array}{ll} \text{I} \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} & \text{II} \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2 \end{cases} & \text{III} \begin{cases} x_3 = \frac{5}{3}i \\ y_3 = -\frac{7}{5}i \end{cases} & \text{IV} \begin{cases} x_4 = -\frac{5}{3}i \\ y_4 = \frac{7}{5}i \end{cases} \end{array}$$

d) Sisteme în care se cunoaște suma și produsul necunoscutelor, adică sisteme de forma:

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p. \end{cases}$$

Se știe că necunoscutele x și y sînt rădăcinile ecuației de gradul doi $z^2 - sz + p = 0$ și reciproc, înlocuind pe x și y cu rădăcinile z_1 și z_2 , este verificat sistemul.

Deci, sistemul $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ se rezolvă astfel:

- 1) Se formează ecuația de gradul doi $z^2 - sz + p = 0$.
- 2) Se rezolvă ecuația și se obțin rădăcinile z_1 și z_2 .
- 3) Soluțiile sistemului sînt:

$$\begin{cases} x = z_1 \\ y = z_2 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = z_2 \\ y = z_1 \end{cases}$$

Exemplu.

$$\begin{cases} x + y = -15 \\ xy = 50. \end{cases}$$

Ecuația în z este $z^2 + 15z + 50 = 0$, avînd rădăcinile $z_1 = -5$, $z_2 = -10$. Soluțiile sistemului sînt:

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -10 \\ y = -5. \end{cases}$$

Sistemele de această formă se pot rezolva și prin metoda substituției.

3. SISTEME SIMETRICE

Se spune că o ecuație este *simetrică* în x și y , dacă înlocuind pe x cu y și pe y cu x forma ecuației nu se schimbă.

Exemple.

a) $x + y = A$.

Înlocuind pe x cu y și pe y cu x , obținem:

$y + x = A$ sau, schimbând ordinea termenilor, $x + y = A$ (ecuația inițială).

b) $x^2 + y^2 = A$.

Înlocuind pe x cu y și pe y cu x , obținem:

$$y^2 + x^2 = A \text{ sau } x^2 + y^2 = A.$$

c) $3x^2 + 3y^2 - 4xy = A$.

Înlocuind pe x cu y și pe y cu x , obținem:

$$3y^2 + 3x^2 - 4yx = A \text{ sau } 3x^2 + 3y^2 - 4xy = A.$$

Sistemele formate din ecuațiile simetrice se numesc *sisteme simetrice*.

Sistemul $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ este un sistem simetric.

Deoarece ecuațiile sistemelor simetrice nu se schimbă dacă schimbăm necunoscutele între ele, înseamnă că dacă sistemul admite soluția (a, b) , admite și soluția (b, a) .

S-a văzut, de exemplu, că sistemul $\begin{cases} x + y = -15 \\ xy = 50 \end{cases}$ a avut soluțiile $(-5, -10)$ și $(-10, -5)$.

Sistemele simetrice se rezolvă, în general, prin substituțiile $x + y = s$ și $xy = p$.

Se folosesc următoarele formule:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy, \text{ adică: } x^2 + y^2 = s^2 - 2p$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y), \text{ adică: } x^3 + y^3 = s^3 - 3ps$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2, \text{ adică: } x^4 + y^4 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2.$$

Exemplul 1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Folosind notația $x + y = s$ și $xy = p$ și înlocuind $x^2 + y^2$ cu $s^2 - 2p$, sistemul devine:

$$\begin{cases} s^2 - 2p = 5 \\ p = 2 \end{cases}$$

care rezolvat are soluțiile:

$$\begin{cases} s = 3 \\ p = 2 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} s = -3 \\ p = 2. \end{cases}$$

Revenind la necunoscutele x și y , avem:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

care, rezolvate după metoda cunoscută, dau soluțiile:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -1 \\ y_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2 \\ y_4 = -1. \end{cases}$$

Exemplul 2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} xy = x + y \\ x^2y^2 - 2(x^2 + y^2) = 0. \end{cases}$$

Se verifică ușor că sistemul este simetric.

Notînd $x + y = s$ și $xy = p$ sistemul devine în mod succesiv:

$$\begin{aligned} \begin{cases} p = s \\ p^2 - 2(s^2 - 2p) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} p = s \\ p^2 - 2s^2 + 4p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = s \\ p^2 - 2p^2 + 4p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p = s \\ p^2 - 4p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = s \\ p(p - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = s \\ p = 0 \text{ sau } p = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Avem deci de rezolvat sistemele

$$\text{I } \begin{cases} s = p \\ p = 0 \end{cases} \text{ și } \text{II } \begin{cases} s = p \\ p = 4 \end{cases} \text{ adică: I } \begin{cases} s = 0 \\ p = 0 \end{cases} \text{ și II } \begin{cases} s = 4 \\ p = 4. \end{cases}$$

Pentru rezolvarea sistemului (I) formăm ecuația în z , $z^2 = 0$ cu rădăcinile $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ și găsim soluția:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Pentru sistemul II, ecuația în z este $z^2 - 4z + 4 = 0$ cu rădăcinile $z_1 = 2$, $z_2 = 2$ și găsim soluția $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$

Exemplul 3. Să se afle soluțiile reale ale sistemului:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

Sistemul este simetric. Notînd $x + y = s$ și $xy = p$, avem:

$$x^3 + y^3 = s^3 - 3ps,$$

$$x^2y + xy^2 = xy(x + y) = ps.$$

Folosind necunoscutele s și p , avem:

$$\begin{cases} s^3 - 3ps = 9 \\ ps = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} s^3 - 3 \cdot 6 = 9 \\ ps = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} s^3 = 27 \\ ps = 6. \end{cases}$$

Deoarece x și y trebuie să fie numere reale, și suma lor s trebuie să fie număr real.

Ecuția $s^3 = 27$ are o singură soluție reală, și anume $s = \sqrt[3]{27}$, adică $s = 3$, care înlocuit în ecuația a doua dă $p \cdot 3 = 6$, $p = 2$.

Deci $\begin{cases} s = 3 \\ p = 2 \end{cases}$ $z^2 - 3z + 2 = 0$ $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

Soluțiile sistemului sînt:

$$\text{I } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{II } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

4. ALTE SISTEME

Exemplul 1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 5x^3 + 4y^3 = x \\ 5y^3 + 4x^3 = y \end{cases}$$

Adunăm și scădem ecuațiile sistemului și obținem:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 5x^3 + 4y^3 = x \\ 5y^3 + 4x^3 = y \end{cases} \iff \begin{cases} 9(x^3 + y^3) = x + y \\ x^3 - y^3 = x - y \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} 9(x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x + y) = 0 \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y) = 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} (x + y)(9x^2 - 9xy + 9y^2 - 1) = 0 \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} x + y = 0 \text{ sau } 9x^2 - 9xy + 9y^2 - 1 = 0 \\ x - y = 0 \text{ sau } x^2 + xy + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Sistemul la care am ajuns este echivalent cu patru sisteme, și anume:

$$\begin{aligned} \text{I } & \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} & \text{II } & \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} & \text{III } & \begin{cases} 9x^2 - 9xy + 9y^2 - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ & & & & \text{IV } & \begin{cases} 9x^2 - 9xy + 9y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sistemul (I) are soluția: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

Sistemul (II) este format dintr-o ecuație de gradul întâi și o ecuație de gradul doi. Îl rezolvăm prin substituție.

Avem

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuația a doua pe y cu $-x$, obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 = 1 \end{cases}, \text{ de unde } \begin{cases} y = -x \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Sistemul (II) are deci soluțiile:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Sistemul III se rezolvă tot prin substituție. Avem:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 9x^2 - 9xy + 9y^2 - 1 = 0 \\ x = y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 9x^2 + 9x^2 - 1 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{3} \\ x = y \end{cases} \end{aligned}$$

Soluțiile sistemului (III) sînt:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Sistemul (IV) este simetric.

Notînd $x + y = s$, $xy = p$, avem:

$$9(x^2 - xy + y^2) - 1 = 9[(x + y)^2 - 3xy] - 1 = 9(s^2 - 3p) - 1,$$

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = (x + y)^2 - xy - 1 = s^2 - p - 1.$$

Sistemul devine:

$$\begin{cases} 9s^2 - 27p - 1 = 0 \\ s^2 - p - 1 = 0. \end{cases}$$

Aflînd din ecuația a doua pe $s^2 = p + 1$ și înlocuind în prima, obținem ecuația:

$$9p + 9 - 27p - 1 = 0, \quad 18p = 8, \quad p = \frac{4}{9}.$$

Din ecuația $s^2 = p + 1$, obținem deci:

$$s^2 = \frac{4}{9} + 1, \quad s^2 = \frac{13}{9}, \quad s = \pm \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Avem deci:

$$\begin{cases} s = \frac{\sqrt{13}}{3} \\ p = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Formăm ecuația în z :

$$z^2 - \frac{\sqrt{13}}{3} z + \frac{4}{9} = 0,$$

$$9z^2 - 3\sqrt{13} z + 4 = 0,$$

care, rezolvată, dă: $z_1 = \frac{\sqrt{13} + i\sqrt{3}}{6}$ și $z_2 = \frac{\sqrt{13} - i\sqrt{3}}{6}$.

Obținem deci pentru sistemul (IV) soluțiile:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{13} + i\sqrt{3}}{6} \\ y = \frac{\sqrt{13} - i\sqrt{3}}{6} \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{13} - i\sqrt{3}}{6} \\ y = \frac{\sqrt{13} + i\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Pe de altă parte avem:

$$\begin{cases} s = -\frac{\sqrt{13}}{3} \\ p = \frac{4}{9} \end{cases}$$

care conduce la ecuația în z :

$$z^2 + \frac{\sqrt{13}}{3} z + \frac{4}{9} = 0$$

cu rădăcinile: $z_1 = \frac{-\sqrt{13} + i\sqrt{3}}{6}$ și $z_2 = \frac{-\sqrt{13} - i\sqrt{3}}{6}$.

Găsim astfel celelalte două soluții ale sistemului (IV)

$$\begin{cases} x = \frac{-\sqrt{13} + i\sqrt{3}}{6} \\ y = \frac{-\sqrt{13} - i\sqrt{3}}{6} \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{13} - i\sqrt{3}}{6} \\ y = \frac{-\sqrt{13} + i\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Soluțiile sistemului inițial sînt perechile:

$$(0, 0), (1, -1), (-1, 1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt{13} + i\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{13} - i\sqrt{3}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{13} - i\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{13} + i\sqrt{3}}{6}\right),$$

$$\left(\frac{-\sqrt{13} + i\sqrt{3}}{6}, \frac{-\sqrt{13} - i\sqrt{3}}{6}\right), \left(\frac{-\sqrt{13} - i\sqrt{3}}{6}, \frac{-\sqrt{13} + i\sqrt{3}}{6}\right).$$

Exemplul 2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4\sqrt{a} \\ \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = (\sqrt{41}-3)a. \end{cases}$$

Se știe că simbolul $\sqrt{A}$ este definit numai dacă A este un număr real pozitiv sau 0. Din acest motiv, sistemele care conțin radicali se rezolvă, în general, în corpul numerelor reale, adică se caută soluțiile (x, y) cu $x \in R, y \in R$. Pentru rezolvarea sistemului dat este necesar să presupunem $a \geq 0$.

Pentru rezolvare se folosesc ridicări la pătrat. Se știe că prin ridicarea la pătrat a ambilor membri ai unei ecuații, nu obținem, în general, o ecuație echivalentă cu cea inițială, dar noua ecuație conține, printre soluțiile sale, toate soluțiile ecuației inițiale. Ridicarea la pătrat face ca în loc de echivalență $\Leftrightarrow$ să avem implicație $\Rightarrow$ ($A=B \Rightarrow A^2=B^2$, nu însă și invers) și deoarece prin această operație este posibil să se introducă soluții străine, la sfîrșit trebuie verificate valorile obținute în ecuațiile inițiale.

Ridicînd ambii membri ai primei ecuații la pătrat, obținem:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4\sqrt{a} \\ \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = (\sqrt{41}-3)a \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})^2 = (4\sqrt{a})^2 \\ \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = (\sqrt{41}-3)a \end{cases} \end{aligned}$$

sau

$$\begin{cases} 2x + 2\sqrt{x^2-y^2} = 16a \\ \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = (\sqrt{41}-3)a. \end{cases}$$

La prima ecuație, împărțind cu 2 și trecînd pe x în membrul drept, obținem $\sqrt{x^2-y^2} = 8a - x$ și înlocuind $\sqrt{x^2-y^2}$ cu $8a - x$ în ecuația a doua, obținem sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y^2} = 8a - x \\ \sqrt{x^2+y^2} - (8a - x) = (\sqrt{41}-3)a \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y^2} = 8a - x \\ \sqrt{x^2+y^2} = (\sqrt{41}+5)a - x. \end{cases}$$

Ridicind la pătrat ambele ecuații, obținem:

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 - y^2})^2 = (8a - x)^2 \\ (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = [(\sqrt{41} + 5)a - x]^2 \\ x^2 - y^2 = 64a^2 - 16ax + x^2 \\ x^2 + y^2 = (66 + 10\sqrt{41})a^2 - 2(\sqrt{41} + 5)ax + x^2. \end{cases}$$

Făcând calculele obținem:

$$\begin{cases} -y^2 = 64a^2 - 16ax \\ y^2 = (66 + 10\sqrt{41})a^2 - 2(\sqrt{41} + 5)ax. \end{cases}$$

Eliminăm necunoscuta y adunând ecuațiile sistemului la care am ajuns. Obținem:

$$2(\sqrt{41} + 13)ax = (130 + 10\sqrt{41})a^2, \text{ de unde}$$

$$x = \frac{(65 + 5\sqrt{41})a}{\sqrt{41} + 13} \text{ și, după simplificare cu } \sqrt{41} + 13 \text{ avem:}$$

$x = 5a$. În acest calcul, deoarece s-a simplificat prin a , s-a presupus $a \neq 0$.

Înlocuind pe x cu $5a$ în ecuația $y^2 = -64a^2 + 16ax$, avem:

$$y^2 = -64a^2 + 80a^2, \text{ de unde } y^2 = 16a^2, \text{ adică } y = \pm 4a.$$

Am obținut deci soluțiile:

$$\text{I } \begin{cases} x = 5a \\ y = 4a \end{cases} \quad \text{II } \begin{cases} x = 5a \\ y = -4a \end{cases}$$

Verificarea sistemului inițial.

$$\begin{cases} x = 5a \\ y = 4a \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{9a} + \sqrt{a} = 4\sqrt{a} \\ \sqrt{25a^2 + 16a^2} - \sqrt{25a^2 - 16a^2} = (\sqrt{41} - 3)a \end{cases}$$

Făcându-se calculele, se constată că această soluție verifică sistemul inițial. În mod analog se constată că și soluția a doua verifică sistemul.

În rezolvare s-a exclus cazul $a = 0$. Se observă că dacă $a = 0$, prima ecuație devine $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 0$.

Deoarece $\sqrt{x+y} \geq 0$ și $\sqrt{x-y} \geq 0$, pentru ca suma lor să fie 0 este necesar să avem simultan $\sqrt{x+y} = 0$ și $\sqrt{x-y} = 0$ sau

$x+y=0$ și $x-y=0$, de unde $x=0$, $y=0$. Se observă că aceste valori satisfac ecuația a doua (pentru $a=0$). Deci, în cazul $a=0$, sistemul admite numai soluția

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Soluțiile sistemului

Dacă $a > 0$, sistemul are două soluții:

$$\begin{cases} x = 5a \\ y = 4a \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = 5a \\ y = -4a \end{cases}$$

Dacă $a = 0$, sistemul are o soluție: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

5. SISTEME DE ECUAȚII CU MAI MULTE NECUNOSCUTE

Pentru rezolvare, în general, folosind metoda substituției, scoatem dintr-o ecuație o necunoscută în funcție de celelalte două necunoscute și o înlocuim în celelalte două ecuații.

Obținem astfel un sistem de două ecuații cu două necunoscute.

Exemplul 1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ x(y + z) = 11 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 66 \end{cases}$$

Aflând din prima ecuație pe x , avem:

$$(1) \quad x = 12 - (y + z)$$

Înlocuind în celelalte două ecuații, obținem un sistem de două ecuații cu două necunoscute:

$$[12 - (y + z)](y + z) = 11$$

$$[12 - (y + z)]^2 + y^2 + z^2 = 66$$

Acest sistem este simetric. Facem substituția:

$$\begin{cases} y + z = s \\ yz = p \end{cases}$$

și avem:

$$\begin{cases} (12 - s)s = 11 \\ (12 - s)^2 + s^2 - 2p = 66 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} s^2 - 12s + 11 = 0 \\ s^2 - 12s - p + 39 = 0 \end{cases}$$

de unde obținem sistemul:

$$\begin{cases} s = 11 \text{ sau } s = 1 \\ p = s^2 - 12s + 39 \end{cases} \quad \text{Cu soluțiile: } \begin{cases} s = 11 \\ p = 28 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} s = 1 \\ p = 28 \end{cases}$$

Ecuațiile în t sînt:

$$t^2 - 11t + 28 = 0.$$

Cu rădăcinile $t_1 = 4$, $t_2 = 7$

și $t^2 - t + 28 = 0$ cu rădăcinile:

$$t_1 = \frac{1 + i\sqrt{111}}{2}, \quad t_2 = \frac{1 - i\sqrt{111}}{2}.$$

Obținem pentru y și z perechile de valori:

$$\begin{cases} y_1 = 4 \\ z_1 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 7 \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = \frac{1 + i\sqrt{111}}{2} \\ z_3 = \frac{1 - i\sqrt{111}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y_4 = \frac{1 - i\sqrt{111}}{2} \\ z_4 = \frac{1 + i\sqrt{111}}{2} \end{cases}$$

Pentru a afla valorile lui x , folosim relația (1).

Obținem:

$$x_1 = 12 - (4 + 7) = 1,$$

$$x_2 = 12 - (7 + 4) = 1,$$

$$x_3 = 12 - \left(\frac{1 + i\sqrt{111}}{2} + \frac{1 - i\sqrt{111}}{2} \right) = 11,$$

$$x_4 = 12 - \left(\frac{1 - i\sqrt{111}}{2} + \frac{1 + i\sqrt{111}}{2} \right) = 11.$$

Soluțiile sistemului sînt:

$$(1, 4, 7), (1, 7, 4), \left(11, \frac{1 + i\sqrt{111}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{111}}{2} \right),$$

$$\left(11, \frac{1 - i\sqrt{111}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{111}}{2} \right).$$

Observație. Sistemul propus se mai poate rezolva și prin alte metode. De exemplu, dacă introducem necunoscutele auxiliare: $y + z = u$ și $yz = v$, sistemul devine:

$$(2) \quad \begin{cases} x + u = 12 \\ x \cdot u = 11 \\ x^2 + u^2 - 2v = 66 \end{cases}$$

În primele două ecuații avem suma și produsul necunoscutelor x și u . Formînd ecuația de gradul doi în t , obținem:

$$t^2 - 12t + 11 = 0,$$

care are rădăcinile $t_1 = 1$, $t_2 = 11$. Deci:

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11 \\ u = 1 \end{cases}$$

Rezolvarea sistemului (2) se reduce la rezolvarea sistemelor:

$$(3) \quad \begin{cases} x = 1 \\ u = 11 \\ x^2 + u^2 - 2v = 66 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x = 11 \\ u = 1 \\ x^2 + u^2 - 2v = 66 \end{cases}$$

Sistemul (3) se rezolvă ușor și are soluția:

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 11 \\ v = 28 \end{cases}$$

Deci $\begin{cases} x + z = 11 \\ yz = 28 \end{cases}$

$$t^2 - 11t + 28 = 0, \quad t_1 = 4, \quad t_2 = 7.$$

Găsim soluțiile (1, 4, 7), (1, 7, 4).

Din sistemul (4), analog, găsim celelalte două soluții.

Exemplul 2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} xy = a \\ yz = b \\ zx = c, \text{ unde } a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \text{ și } abc > 0 \end{cases}$$

Pentru rezolvare înmulțim ecuațiile și obținem:

$$x^2 y^2 z^2 = abc.$$

Deoarece $abc > 0$:

$$xyz = \pm \sqrt{abc}.$$

Împărțind această ultimă ecuație cu fiecare ecuație a sistemului, obținem:

$$x = \pm \frac{1}{b} \sqrt{abc}, \quad y = \pm \frac{1}{c} \sqrt{abc}, \quad z = \pm \frac{1}{a} \sqrt{abc}.$$

Sistemul are două soluții.

Exemplul 3. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 289 \\ x + y + z = 29 \\ xy = 72 \end{cases}$$

Se observă că ecuația a treia nu conține decât necunoscutele x și y , și aceasta ne sugerează să eliminăm pe z din primele două ecuații. Avem:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 289 \\ x + y + z = 29 \\ xy = 72 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 289 \\ z = 29 - (x + y) \\ xy = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + [29 - (x + y)]^2 = 289 \\ z = 29 - (x + y) \\ xy = 72 \end{cases} \end{aligned}$$

Se va rezolva întâi sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 + [29 - (x + y)]^2 = 289 \\ xy = 72 \end{cases}$

care este simetric cu ajutorul substituțiilor $x + y = s$ și $xy = p$, iar z se va afla din ecuația $z = 29 - (x + y)$.

13.05.1969 202 CAPITOLUL VIII

6. REZOLVAREA ECUAȚIEI $z^2 = A$ ÎN CORPUL NUMERELOR COMPLEXE

Fie $z = x + yi$ și $A = a + bi$, unde x, y, a și b sînt numere reale.
Ecuația $z^2 = A$ devine:

$$(x + iy)^2 = a + bi$$

sau

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi, \text{ ecuație}$$

care este echivalentă cu sistemul:

$$(1) \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Trebuie aflate rădăcinile reale ale acestui sistem.

Pentru rezolvare ridicăm la pătrat ambele ecuații și adunăm membru cu membru. Obținem:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2.$$

De unde:

$$x^2 + y^2 = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Cum suma pătratelor a două numere reale este un număr pozitiv:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Înlocuim sistemul inițial prin sistemul:

$$(2) \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

de unde, prin rezolvare, obținem:

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Soluțiile sistemului (2) sînt deci:

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right); \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right);$$

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right); \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right).$$

Soluțiile sistemului (1) se găsesc printre soluțiile sistemului (2). Din soluțiile sistemului (2) trebuie să fie eliminate soluțiile străine care s-au introdus prin ridicare la pătrat.

Ecuția a doua a sistemului (1) ne conduce la următoarele considerații:

a) Dacă $b > 0$, x și y trebuie să fie de același semn, deci numai primele două soluții sînt acceptabile și rădăcinile ecuației $Z^2 = a + bi$ sînt:

$$Z_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right).$$

b) Dacă $b < 0$, x și y trebuie să fie de semne contrare, deci numai ultimele două soluții sînt acceptabile și rădăcinile ecuației $Z^2 = a + bi$ sînt:

$$Z_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right).$$

În ambele cazuri, ecuația are două rădăcini ca și în cazul numerelor reale.

Observație. Numerele complexe Z_1 și Z_2 se mai numesc și rădăcini pătrate ale numărului complex $a + bi$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația:

$$z^2 = -3 + 4i.$$

Avem

$$z = x + yi, \text{ deci:}$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -3 + 4i.$$

De unde obținem sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Din ecuația a doua scoatem $y = \frac{2}{x}$ și înlocuind în prima:

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3,$$

de unde obținem: $x^2 = 1$, $x^2 = -4$,
 x fiind număr real x^2 nu poate fi egal cu -4 , deci $x = \pm 1$.

Din $y = \frac{2}{x}$ obținem $y = \pm 2$.

Rădăcinile ecuației sînt:

$$z_1 = 1 + 2i,$$

$$z_2 = -1 - 2i.$$

EXERCITII ȘI PROBLEME

Să se rezolve în corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$ sistemele:

1. a)
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 - x + 3y = 10 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2y - x - 3 = 0 \\ 4x^2 + 6y^2 + 13x + 25 = 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x = 5 - 3y \\ 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y = y \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 + 6x - 3y = 12 \end{cases}$$

4. a)
$$\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7} \\ x^2 + y^2 = 296 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^3 + y^3 = 126 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x^3 - y^3 = 335 \end{cases}$$

5. a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 68 \\ x^2 - y^2 + x - y = 44 \end{cases}$$

Indicație. Se adună ecuațiile. ✓

b)
$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 18 \\ xy + 4y^2 = 7 \end{cases}$$

Indicație. Se adună ecuațiile (se poate aplica și metoda de la sistemele în care membrul stâng al fiecărei ecuații este polinom omogen).

6. a)
$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 - 4xy = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 4xy = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43 \end{cases}$$

Indicație. Sistemul este simetric.

c)
$$\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 74 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 73 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy + ay^2 = 0 \end{cases}$$

Discuție. Dacă $a \neq -\frac{10}{9}$ sau $a \neq -4$ sistemul are soluția $(0, 0)$.

Dacă $a = -\frac{10}{9}$ sau $a = -4$ sistemul este nedeterminat.

$$8. a) \quad \begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

tema
8 a b

Să se determine valorile lui m , pentru care sistemele următoare sînt compatibile și în acest caz să se rezolve:

$$9. \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 - x + 3y = 10 \\ x^2 + y^2 + mx = 12 \end{cases}$$

Indicație. Se rezolvă sistemul format din primele două ecuații (v. sistemul 1) și se înlocuiesc valorile lui x și y în ecuația a treia).

$$10. \quad \begin{cases} x + y = 4m - 4 \\ xy + 5x + 5y = 6m^2 - 6 \\ 5xy + 4x + 4y = m^2 - 3m + 2 \end{cases}$$

Indicație. Sistemul este simetric ($x + y = s$, $xy = p$).

Să se rezolve în corpul numerelor reale sistemele:

$$11. \quad \begin{cases} xy(x + y) = 6 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$$

Indicație. Sistemul este simetric.

$$12. \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + 2\sqrt{x + y} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

Să se rezolve în corpul numerelor complexe:

$$13. a) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 8 \\ x + y + 2z = 20 \\ z^2 - xy = 4 \end{cases}$$

Indicație. Se află z din ecuația a doua și se notează

$$x + y = s \text{ și } xy = p \text{ etc.}$$

$$b) \begin{cases} x(y - z) + y(y + z) = z \\ y(z - x) + z(z + x) = 7 \\ z(x - y) + x(x + y) = z \end{cases}$$

Indicație. Se scade ecuația a treia din prima ecuație și se obține $(y - x)(x + y + z) = 0$ etc.

$$14. \quad \frac{xy + xz}{2} = \frac{yz + yx}{3} = \frac{zx + zy}{4} = x + y + z.$$

Indicație Se notează $x + y + z$ cu t și se obține:

$$\begin{cases} xy + xz = 2t \\ yz + yx = 3t \\ zx + zy = 4t \end{cases}$$

Adunând obținem $xy + yz + zx = \frac{9}{2}t$ și scăzând pe rând ecuațiile $xy + xz = 2t$, ... obținem un sistem de forma:

$$\begin{cases} xy = A \\ yz = B \\ zx = C \end{cases}$$

Să se rezolve în corpul numerelor complexe ecuațiile:

15. a) $x^2 = -2 + 6i$; (b) $x^2 = 3 - 4i$; (c) $x^2 - 24 + 10i = 0$.

16. (a) $x^2 = i$, (b) $x^2 = 3i$, c) $x^2 = -5i$, d) $x^2 = Ai$.

Ce legătură există între rădăcinile ecuațiilor $x^2 = i$ și $x^2 = Ai$?

Să se rezolve sistemele:

17.
$$\begin{cases} x + y = 2a \\ \frac{x^2 - 2a^2 + y^2}{2} = 1 \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} xy + x + y = 29 \\ xy - 2(x + y) = 2 \end{cases}$$

Indicație. Sistemul este simetric.

20.
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 4 \\ x^2 + xy - y^2 = 5 \end{cases}$$
 21.
$$\begin{cases} x^2 + xy = a \\ y^2 + xy = b \end{cases}$$
 22. a)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 7 \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

Să se rezolve sistemele:

$$\begin{array}{ll}
 \text{23. a)} \begin{cases} xy = 2 \\ yz = 6 \\ xz = 3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \\ xz = 3 \end{cases} \\
 \text{d)} \begin{cases} xy + xz = 7 \\ xy + yz = 15 \\ yz + xz = 16 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ xy + xz + yz = 29 \end{cases} \\
 & \text{e)} \begin{cases} x^2 + xy + xz = a \\ y^2 + xy + yz = b \\ z^2 + xz + yz = c \end{cases}
 \end{array}$$

24. Suma a două numere pozitive adunată cu suma pătratelor lor este 152. Diferența acestor numere adunată cu diferența pătratelor lor este 68. Să se găsească aceste numere.

25. Produsul dintre numărătorul și numitorul unei fracții este 42. Dacă mărim numărătorul fracției cu o unitate și micșorăm numitorul tot cu o unitate, obținem fracția inversă celei date. Să se găsească fracția.

26. Să se afle un număr de două cifre știind că dacă îl împărțim prin produsul cifrelor sale obținem câtul 2 și restul 5, iar dacă așezăm cifrele acestui număr în ordine inversă și îl împărțim prin produsul cifrelor sale obținem câtul 5 și restul 2.

27. Un tren pleacă dintr-o stație și merge cu o viteză uniform accelerată. După ce parcurge o distanță de 2,1 km, trenul are viteza de 54 km/oră. Să se afle accelerația și timpul în care trenul a ajuns la viteza de 54 km/oră.

28. Distanța între două orașe A și B este 180 km. Din cele două orașe pleacă în același moment două trenuri unul către celălalt. Din momentul întâlnirii lor, trenul plecat din A sosește în orașul B peste 2 ore, iar celălalt tren sosește în orașul A peste 4 ore și 30 min. Să se afle viteza fiecărui tren.

29. Rezultanta a două forțe perpendiculare este de 25 N. Dacă forța mai mică s-ar mări cu 8 N, iar forța mai mare s-ar micșora cu 4 N, rezultanta lor ar rămâne neschimbată. Să se afle mărimile forțelor componente.

30. Pe laturile unui unghi de 60° sunt situate punctele A și B , între care este o distanță de 31 m. Dacă punctul A se deplasează către vîrf pe latura unghiului cu 20 m și distanța dintre A și B se micșorează cu 10 m. Să se afle distanțele punctelor A și B la vîrf unghiului.

31. Pentru a transporta o marfă două autocamioane au lucrat împreună 5 ore, iar unul din ele a mai continuat lucrul încă 60 min. Cît timp îi este necesar fiecărui autocamion pentru transportul acestei mărfi, dacă autocamionul care a lucrat mai puțin poate să transporte toată marfa într-un timp cu două ore mai puțin decît ar transporta toată marfa celălalt autocamion.

32. Să se afle laturile unui triunghi dreptunghi care are aria 6 dm^2 și perimetrul 12 dm.

RĂSPUNSURI

Capitolul I

1. $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 4, 3\} = \{1, 3, 4, 2\}$ etc.
2. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
3. $\{12, 15, 18\}$.
5. $O \in D_1, O \in D_2, O \in D_3, A \in D_1, B \in D_2, A \in D, B \in D, C \in D, C \in D_3$.
6. a) Dacă numai afirmația persoanei A este adevărată, atunci evident că B este vinovatul.
Dacă numai afirmația persoanei B este adevărată, atunci rezultă că C este vinovatul etc.

8. a) $x = 2, x = -2$; b) $x = 1, x = -1$; c) $x = -1$.

$$9. a) \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x = 1 \\ y = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = 11 \\ y = 9 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ y = 11 \\ z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$14. \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

$$15. A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{36\}, C = \{2,5\}.$$

$$16. A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}, B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}.$$

A este mulțimea multiplilor lui 2 (mulțimea numerelor pare), iar B este mulțimea multiplilor lui 3.

17. Elementele mulțimii A sînt multiplii lui 2, iar elementele mulțimii B sînt multiplii lui 4. Orice multiplu al lui 4 este în același timp un multiplu al lui 2.

19. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

20. $X = \{4\}$ sau $X = \{1, 4\}$ etc.

22. Dacă $a = 1$, avem: $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Dacă $a = 2$, avem: $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Dacă $a = 3$, avem: $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{3, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ etc.

Dacă $a > 4$, avem $\{1, 2, 3, 4, a, 2a\}$.

23. $\{3, 4\}$, $\{x, t\}$, $\emptyset$.

24. $X = \{1, 2\}$, $X = \{1, 2, 4\}$.

25. a) Răspunsul este negativ după cum rezultă din exemplul următor:
 $\{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{4, 5\}$.

Capitolul II

Exerciții (1)

1. a) $-3 \frac{1}{15} x^2 z$; b) $-ztu^2$; c) $-\frac{1}{6} x^2 y^a$.

2. a) $4,5 x^2 y - 1,5 y z^2$; b) $4x^2 - 3x + 2$; c) $x^2 y^2 - 2x^2 y - 2xy^2$.

3. z^5 ; y^{11} ; x^{12} ; $(2x + 1)^7$.

4. x^{a+b+c} ; $y^{2m+n+3p}$; x^{9a} .

5. x^4 ; y^9 ; z^{10} ; y^{6b} ; z^{mn} .

6. a) $\frac{1}{2} x^3 y^3 z^2$; $-\frac{1}{2} x^4 y^4$; $0,001 x^{n+3} y^{n+2}$.

b) $-x^3 y z^5$; $2x^4 y^3 z^3 t u$; $-0,5 x^2 y^3 z^5 t$.

c) $1,5 (x^2 - y)^5 (2x^2 + 3y)^{a+1}$.

7. a) $4x^4 y^2$; $2,25 x^6 y^4 x^4$; $-x^3 y^6 z^9$; $81 x^8 y^{20}$.

b) $\frac{1}{25} x^2 y^4 z^6$; $\frac{8}{27} x^9 y^6 z^{12} t^3$; $-\frac{1}{32} x^{10} y^{20} z^5$.

c) $x^{2a} y^a$; $2b y^b z^{3b}$; $3m x^{am} y^{bm}$; $4a z^{2an} t^{2ap}$.

Exerciții (2)

9. $P(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 2$.

10. $P(x) = 2x^2 - 5x^3 + 3x^4 + 3x^7 - x^8$.

11. $P(x, y) = y^5 - (3x - 1) y^3 + (x^3 - 4) y^2 + (3x^4 - 2x^2 - 1) y - x^4 - x^3 + 2x^2 z^3 + 2$.

12. $P(x, y, z) = (x^5 + 3x^3 y^2 - 2y^4 z) + (2x^3 y - x^2 y^2 - 3x^4) + (-2xz^2 + y^3) + (-3xz + 3y^2) + (2y - z)$.

13. a) $P(x, y, z) = -(2y + 3)x^2 + (2yz - z^3 - 2z + 3)x + (y^3 + 3y^2 z - y + z^2 + 2z - 3)$.

b) $P(x, y, z) = (-2x^2 y + 2xyz + y^3 + 3y^2 z - xz^2) - (3x^2 + 2xz - z^2) + (3x - y + 2z) - 3$.

Exerciții (3)

1. a) $30x^2 + 15xy$; b) $-16x^3 + 48x^2 - 32x$; c) $4a^3b - 10a^2b^2 + 2ab^3$.
2. a) $3x^2y + 1 \frac{1}{2} x^2y^2 - 2xy^3$; b) $-52a^2x^2 - 8axy^2 + a^2xy - 4ax^3$;
c) $6a^4x^3 - 15a^3x^4 + 15a^2x^5 - 9ax^6$.
3. a) $4a - 1,2a^2 + 0,6a^3$; b) $a^{m+n} + 2a^{n+2}$; c) $4y^{2a} - 6y^a$.
4. a) $-20a^3b^2 + 15a^2b^3 - 16a^2b^3 + 12ab^6$;
b) $0,375x^2yz^3 - 0,625x^2yz^2 - 0,15xy^2z^3 + 0,25xy^2z$;
c) $-6a^5 + 7a^4b + 20a^3b^2 - 13a^2b^3 - 20ab^4$.
5. a) $8x^4 - 34x^3 + 22x^2 + 3x - 6$; b) $2 - 2x - 28x^2 - 6x^4 - 22x^5 - 24x^6$;
c) $x^4 - y^4$.
6. a) $a^5 - x^5$; b) $x^5 + a^5$; c) $x^5 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$.
7. a) $-3x^8 - 5x^7 + 17x^6 + 7x^5 - 15x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 7x + 6$;
b) $x^9 + 2x^8 - 3x^7 - 7x^6 - 3x^5 + x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$;
c) $x^7 - x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$.
8. a) $6x^3 - 13x^2y + 16xy^2 - 15y^3$; b) $-2x^5 - x^4y - x^3y^2 + 9x^2y - 6xy^4 + y^5$;
c) $3x^6 + 6x^5y - 5x^4y^2 - 8x^3y^3 + 5x^2y^4 + 2xy^5$.
9. a) $24x^3 - 14x^2y - 11xy^2 + 6y^3$; b) $6x^7 - x^5 + 12x^4 - x^3 - 2x^2 - 2$;
c) $a^8 + a^4 + 1$; d) $x^6 - x^4y^2 - x^2y^4 + y^6$.
10. a) $18x^6 + 3x^5 - 133x^4 - 131x^3 + 31x^2 + 56x + 12$;
b) $-x^{10} + x^9 - x^8 + 2x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^2 + x - 1$.
11. a) $-28x$; b) $19y^3$; c) $-11ab - 21ac + 2b^2 + 23bc + 5c^2$.

Exerciții (4)

1. x^2 ; a ; 1 ; x^3 ; y^{m+3} ; y^{m+3} .
2. a) $2\frac{4}{7}xy$; $-1\frac{1}{6}abc^3$; $-1\frac{9}{16}xz^3$; $\frac{4}{5}ax^2$; $-\frac{1}{2}a^3b$.
b) $-\frac{3}{4}a^{m-2}b^{m-1}c^2$; $0,5x^2y$; $\frac{9}{25}x^{m-2}y^2$; $-\frac{3}{14}x^mym$.
3. a) $-3(x-1)^3$; $-\frac{9}{16}$; b) $-3(ax^2 - y)^{m-2}$; $1,6(a+b+c^2)^{m+2}$;
c) $-4\frac{1}{6}(x+a)^2(y+b)$; $0,4(x+y^2-z^3)(x-y^3+z^2)^{n+1}$.
d) $-3x^3y^3 + 2\frac{1}{2}x^2y - 2x + 2\frac{2}{3}y^2$; $-6a^2 - \frac{2}{3}ab^3 + b^4$.
e) $5y^3 + 8y^2 - 9y + 1$; $-2(2x-1)^3 + 3(2x-1)^2 + 4(2x-1) + 6$.
4. a) $3a - 1$; $2z - 6$; $6x - 2y$; $2x - 8y$. b) $2x^2 + 5x - 7$;
 $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$; $-x^3 + 2x^2 + 6x + 5$. c) $3x - 7y^2$; $3x^2y^2 + 2xy^2$.

5. a) $2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 5$; $x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 5x^2 + 10x - 5$;
 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$. b) $x^2 + x + 1$; $x^6 - x^5 + x^3 - x + 1$;
 $x^8 + x^7 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$.
6. a) $2y + 5$; $x^2y + 12$; $x^m - 1$. b) $x - 3$; $x^2 - 2y$; $(y - 2)^2$.
 c) $x - 3$; $2x + 1$; $x - 3a$; $5x^2 + 4y$. d) $x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 +$
 $+ x^2 - x + 1$; $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; $16x^3 - 24x^2y +$
 $+ 36x^4y^2 - 54x^2y^3 + 81y^4$; $x^6y^9 + 4x^4y^7 + 16x^2y^5 + 64y^3$.
7. a) $m = -14$. b) $n = 12$. c) $p = 5$.
8. $16x$. 9. $y^2 - 2yz + z^2$.
10. a) *Indicație:* Se scrie $(x + 1)^6 = [(x + 1)^3]^2$ și $(x + 1)^4 = [(x + 1)^2]^2$, iar după efectuarea calculelor se găsește $x^4 + 14x^2 + 1$.
 b) Aceeași indicație ca la exercițiul precedent. Răspuns: $x^4 + 14x^2 + 1$.
11. a) 7. b) -13. c) $\frac{73}{16}$.

Exerciții (5)

1. a) $4x^2 - 1$; b) $25x^2 - 0,04$; c) $27,04x^4 - 5,76y^2$.
2. a) $9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$; b) $4x^2 - 20xy^2 + 25y^4$; c) $4x^4y^2 - 2x^2yz + 0,25z^2$;
 d) $\frac{4}{25}x^4y^2 + \frac{4}{15}x^3y^3 + \frac{1}{9}x^2y^4$.
3. a) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$; b) $64x^3 - 16x^2y + \frac{4}{3}xy^2 - \frac{1}{27}y^3$;
 c) $0,008x^6y^3 + 0,6x^5y^2 + 15x^4y^3 + 125x^3y^2$; d) $3\frac{3}{8}y^6 + 4\frac{1}{2}y^4 + 2y^2 + \frac{8}{27}$.
4. b) $x^3 + 8y^3$; c) $8x^3 - 27y^3$; d) $x^6 - 125y^3$; e) $8x^6 + 27y^9$.
5. a) $0,125 + x^6$; b) $\frac{1}{27}m^3 - \frac{1}{8}x^6$; c) $125x^3 - \frac{1}{8}y^6$;
 d) $0,027x^6 - \frac{8}{343}y^3$.
6. a) $x^2 + 0,7x + 0,1$; b) $x^2 - 0,7x + 0,12$; c) $x^2 + 1,5x + 0,5$;
 d) $y^2 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{8}$; e) $x^3 + \frac{8}{15}x + \frac{1}{15}$; f) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{18}$.
7. a) $4x^2 + 25y^2 + 9z^2 + 20xy + 12xz + 30yz$; b) $9x^4 - 30x^3 + 31x^2 - 10x +$
 $+ 1$; c) $9a^4 + 12a^2bc + 30a^2 + 4b^2c^3 + 20bc + 25$; d) $x^4 + x^3 - 2,15x^2 -$
 $- 1,2x + 1,44$; e) $x^4 - x^3 + 1\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}$;
 f) $9x^8 + 12x^7 - 2x^6 - 16x^5 - x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.
8. a) $625x^4 - 16$; b) $81y^4 - 16x^4$; c) $x^9 + 19\,683$; d) $19\,683x^9 + 512y^9$.

9. a) $729x^6 - 64$; b) $4\,096y^6 - 15\,625$; c) $64x^6 - 117\,649y^6$;
 d) $a^6x^{12} - b^6y^{18}$.
 10. a) $117\,649x^6 - 1$; b) $729x^6 - 15\,625y^6$; c) $4\,096y^{12} - 729$;
 d) $729x^6 - 0,000064y^{12}$.

Exerciții (6)

1. a) $3ax(a + 2x)$; $5xy^2(1 - 2x^2y^2)$; $x^m(1 + x)$; $x^m(x^n - 1)$.
 b) $3ax(9x^2 - 3ax + 2a^2)$; $12x^2y^4(x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - y^3)$.
 c) $(x + a)(x - a - 2)$; $(x - y)^2$; $(x + y + z)^2$.
 d) $(2x - y)(a - b + c)$; $4x(x - 2)$; $(x - a)^3(x - 3a)^2$.

Exerciții (7)

$$(x + 5y)(x - 5y); (a^2x + 3by)(a^2x - 3by); (6x + 7y)(6x - y);$$

$$8(x + 3y)(5x - 6y); 5(x - 1)(x + 1); (18x^2 + 4xy - 15y^2)(18x^2 -$$

$$- 16xy + 15y^2).$$

Exerciții (8)

1. $x(m - n)(mx + nx - 1)$; $-10(x + a)(x + 3a)$.
 2. Indicație: După desfacerea parantezelor, se scrie polinomul sub forma unei sume de termeni cu coeficienții 1.
 Se obține: $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$.
 3. Indicație: Se scrie $x^3 - x^2 + 2 = (x^3 + 1) - (x^2 - 1)$ și $x^3 + x^2 - 2 = (x^3 - 1) + (x^2 - 1)$. Se obține: $(x + 1)(x^2 - 2x + 2)$; $(x - 1)(x^2 + 2x + 2)$.
 4. Indicație: În timpul descompunerii, se ține seama de indicațiile de la exercițiul precedent. Se obține: $3y^2(y + 1)^2(y^2 - 2y + 2)$; $5y(y - 1)^2(y^2 + 2y + 2)$.
 5. Indicație: Se descompun în factori cele două sume de cuburi. Apoi, termenul $-5x$ se înlocuiește prin $x - 6x$. Se obține: $-3(2x + 1)(3x + 2)(x - 3)$.
 6. Indicație: Se descompune suma de cuburi formată cu doi dintre termeni, după care se scoate factorul comun. Se obține: $3(a - b)(b - c)(c - a)$.
 7. Indicație: Se descompune în factori diferența de cuburi și diferența de pătrate. Se ridică apoi la pătrat, și respectiv la cub, conținutul parantezelor, după care se scoate factorul comun. Se obține: $a^2(x - a)^2(3x^2 + 4ax + 2a^2)$.
 8. Indicație: Polinomul se scrie: $(x - y)^2 + xy^2 + x - x^2y - y$ și se grupează termenii convenabil. Se obține: $(x - y)(x - y - xy + 1)$.
 9. $(x + 1)(x - 1)(yz + 1 + y + z)(yz + 1 - y - z)$.

Exerciții (9)

1. a) $x^2 - 1$; b) $x^2 + 1$; c) $x + 1$; d) 1 (sînt polinoame coprime).
 2. a) $(x + 1)^2(x - 1) = x^3 + x^2 - x - 1$; b) $x^6 - 1$; c) $x^4 - 5x^2 + 4$;
 d) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4$.

Exerciții (10)

1. $\frac{2ax^2}{3b^2y}; \frac{2z}{7x}; \frac{55ax}{39y}; \frac{xy}{3}$ 2. $\frac{b(6a-5b)}{2a}; \frac{2}{3xy}; \frac{3x}{2(2x-1)}$
3. $\frac{x+3}{x(x-3)}; \frac{1}{a+1}; x-2$ 4. $\frac{a+b}{a-b}; \frac{a^2+x}{a-x}$
5. $\frac{x-1}{x+1}; 1$ 6. $\frac{x-y}{xy+1}; \frac{ab+1}{ab-1}$ 7. $\frac{x(y+z)}{y}; \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$
8. $\frac{1}{1-b^2}; (x-p)(x-q)$ 9. $\frac{x+y+z-t}{x-y+z-t}; \frac{x+y+z-t}{x-y-z-t}$
10. $\frac{x+a-1}{x+b-1}; \frac{x+y+1}{x+y-1}$ 11. $(xy)^{m-p}; \frac{1}{a^{n-1}}$
12. $\frac{x^a+y^a}{x^a-y^a}; \frac{x(x+1)}{(x-1)^2}$ 13. $3; -1; \frac{1}{3}; \frac{3}{5}$
14. $\frac{4}{7}; \frac{2}{5}; 0; -\frac{1}{2}; 1$ 15. $\frac{3}{4}$ 16. $0; \frac{2}{3}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{7}{8}$ 17. $-3; -2; -1; 0; 1$

Exerciții (11)

1. $\frac{6b}{4a^2-9b^2}; \frac{2(x-y)}{x^2+xy+y^2}$ 2. $\frac{1}{x-y}$ 3. $\frac{x+1}{x^4-x^3+x^2-x+1}$
4. $\frac{1}{xyz}$ 5. 0 6. $\frac{1}{xyz}$ 7. 2

Exerciții (12)

1. $\frac{x(x+y)(x-y)}{y^2}; \frac{2x+3}{2x-3}$ 2. 1 3. $\frac{bm}{2a^2}; \frac{(x-2a)(2x+a)}{(2x+a)(2x-a)}$
4. $\frac{x^2+y^2}{2xy}$ 5. $\frac{x(y+z-x)}{y(x+z-y)}$ 6. $\frac{y}{(x-1)(x+y)}$ 8. $-\frac{ab}{a+b}$
9. y 10. xy 11. $\frac{a+2}{a-2}$ 12. $\frac{1}{a^2-ab+b^2}$ 13. $-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$
14. $\frac{1}{x+2}$ 15. $(m+2)^2$ 16. 1 17. $\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}$ 18. $a+b$ 19. x
20. $\frac{x^2}{2-x^2}$ 21. $\frac{a+b}{1-ab}$ 22. $-\frac{1}{x}; \frac{1}{x+2}$

Capitolul III

1. a) $x = 5$; b) $x = 1$; c) $x = 3$; d) $x = 3$; e) $x = 2$.

2. b) $x = \frac{ab}{a+b}$; c) $x = \frac{3(n+1)}{4}$; d) $x = \frac{a}{a+1}$; e) $x = \frac{m(a+b)}{a}$;

f) $x = \frac{2a+c}{3}$; g) $x = a^2 + 1$.

4. a) $x = 1$ d) $x = 19$ e) $x = 5$ f) $x = 5, y = 6$;
 $y = -1$ $y = -1$ $y = 7$

h) $a = 8, b = 4$; i) $r = 5, s = 3$;

5. a) $x = a + b$ b) $x = 3m$ c) $x = \frac{k}{1}$
 $y = a - b$ $y = -2n$ $y = 1$

d) $x = \frac{1}{m}$ e) $x = (a + b)^2$

$y = \frac{1}{n}$ $y = (a - b)^2$

6. a) $x = 6$ b) $x = \frac{22}{7}$ c) $x = 2$ d) $x = 1$ e) $x = 0$

$y = 5$ $y = -\frac{11}{5}$ $y = 1$ $y = 3$ $y = 1$

$z = 2$ $z = -\frac{12}{19}$ $z = 4$ $z = 4$ $z = 2$

$u = 2$ $u = 3$

Capitolul IV

1. $x \leq -\frac{19}{5}$; 2. $x > \frac{53}{22}$; 3. $x \leq \frac{1}{7}$; 4. $x < \frac{15}{11}$; 5. $x \geq \frac{17}{2}$; 6. $x > 10\frac{2}{3}$.

$x < 2, x < \frac{11}{5}$; 7. $x < \frac{4}{9}, x < \frac{1}{5}$; 8. $x < -3$, imposibil, $x > -2$; 9. $x < \frac{2}{3}$

sau $x > \frac{3}{2}$; $-\frac{8}{3} < x < 5$; $-\frac{7}{2} < x < \frac{2}{3}$.

Capitolul V

Scoaterea factorilor de sub radical

I. 1. $3\sqrt[3]{6}$; $10\sqrt[3]{55}$. 2. $2\sqrt[3]{14}$; $50\sqrt[3]{3}$; $-3\sqrt[3]{4}$; $-4\sqrt[3]{6}$.

II. 1. $x\sqrt{x}$ dacă $x \geq 0$; x^2 ; $x^2\sqrt{x}$ dacă $x > 0$.

$$2. m - 2n; |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{dacă } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{dacă } x < 1 \end{cases}$$

$$3. x^2 + y^2; (x - 1)^2.$$

$$4. \frac{a + 2}{|a + 2|} \sqrt{2} = \begin{cases} \frac{a + 2}{a + 2} \sqrt{2} = \sqrt{2} & \text{dacă } a > -2 \\ \frac{a + 2}{-(a + 2)} \sqrt{2} = -\sqrt{2} & \text{dacă } a < -2 \end{cases}$$

$$5. \frac{n}{|n|} = \begin{cases} \frac{n}{n} = 1 & \text{dacă } n > 0 \\ \frac{n}{-n} = -1 & \text{dacă } n < 0. \end{cases}$$

$$6. |x - 1| (x^2 + 9) = \begin{cases} (x - 1) (x^2 + 9) & \text{dacă } x > 1 \\ (1 - x) (x^2 + 9) & \text{dacă } x < 1 \end{cases}$$

$$7. \sqrt{|a - x|}.$$

$$8. (x^2 + 2) |3 - x| = \begin{cases} (x^2 + 2) (3 - x) & \text{dacă } 3 > x \\ (x^2 + 2) (x - 3) & \text{dacă } 3 < x \end{cases}$$

III. 1. dacă $a \geq b$; 2. orice x ; 3. orice a și b ; 4. orice a ;
5. dacă $x \geq 0$; 6. orice a ; 7. orice x ; 8. dacă $x \geq 0$;
9. dacă $x \geq 0$; 10. dacă $x \geq 0$.

$$IV. 1. x + |x - 3| = \begin{cases} x + (x - 3) = 2x - 3 & \text{dacă } x > 3 \\ x - (x - 3) = 3 & \text{dacă } x \leq 3. \end{cases}$$

$$2. x - 2 + |x - 1| = \begin{cases} x - 2 + (x - 1) = 2x - 3 & \text{dacă } x > 1 \\ x - 2 - (x - 1) = -1 & \text{dacă } x \leq 1 \end{cases}$$

$$3. x - 2 + |x - 2| = \begin{cases} x - 2 + (x - 2) = 2(x - 2) & \text{dacă } x > 2 \\ x - 2 - (x - 2) = 0 & \text{dacă } x \leq 2 \end{cases}$$

Introducerea factorilor sub radical

$$1. \sqrt{9x}; \sqrt{28a}; -\sqrt{45b}. \quad 2. 1; \sqrt[3]{8a^2x}; \sqrt[5]{a^9}. \quad 3. -\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}; -\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}; \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

$$4. \sqrt[3]{\frac{x + n}{x - y}}. \quad 5. \sqrt[n+1]{x^{n+2}y^{n+3}}. \quad 6. \sqrt[2n+1]{\frac{X}{Y^{n-1}}}.$$

Adunarea și scăderea radicalilor

$$1. 8\sqrt{3}; -2\sqrt{x}; 7\sqrt{2x} - 4\sqrt{x}.$$

$$2. 13\sqrt{3}; -3\sqrt{2}.$$

$$3. 2\sqrt[3]{2}; 4. -\frac{5}{2}\sqrt[3]{3}.$$

5. *Indicație:* Se scriu radicalii sub formă de fracții;

$$(x - 1)^2 \sqrt{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

6. *Indicație:* Se fac simplificări sub radicali și apoi se elimină numitorul:

$$\frac{a-x}{a+x} \sqrt{a^2-x^2}.$$

Înmulțirea radicalilor:

1. $12\sqrt{3}$; 12 ; 2 ; $3\sqrt{2}$. 2. $\sqrt{x}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4x}{3z}$. 3. $6(1 + 4\sqrt{10} - 5\sqrt{3})$. 4. 30 ;

2 $\sqrt[3]{18} - 3\sqrt[3]{12}$. 5. x ; 1. 6. $\sqrt[4]{a^3}$; $ab\sqrt[6]{a^2b}$; a^2b ; $x^{12}\sqrt[12]{x^5}$; $5b\sqrt{b}$.

7. $x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$. 8. *Indicație:* Se dă factor comun sub radical și apoi se aduce la același indice: $x^2\sqrt[3]{y}$. 9. $-15\sqrt{b}$. 10. $a^4 - 1$.

Împărțirea radicalilor:

1. x ; $4\sqrt{3}$; $a\sqrt[n]{a^{n-3}}$. 2. 30 ; $a + b - \sqrt{ab}$. 3. $\sqrt[15]{x^2}$; $\sqrt[12]{x}$; $a\sqrt[4]{b}$; $\sqrt[2n]{a^{n+1}}$;
 $x\sqrt[n]{x^{n-3}}$. 4. $3\sqrt[6]{x} + 4\sqrt[3]{x^2}$. 5. $\sqrt[4]{x}$; $\sqrt[60]{\frac{c^8}{x^7y^{49}}}$. 6. $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. 7. $\sqrt[3]{9a} +$
 $+ \sqrt[3]{5b}$. 8. $\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{2y^2}$.

Ridicarea la putere a radicalilor

1. a^3 ; $2x^3\sqrt[4]{2x^3}$; $-a^8b^2\sqrt[8]{a^6b^5}$; $16a\sqrt[3]{9a}$; $(x-y)\sqrt[5]{(x-y)^3}$. 2. $5 - 2\sqrt{6}$;
 $\frac{3}{4} + 2\sqrt{2}$; $6 + 4\sqrt{2}$. 3. $3\sqrt{3} - 18\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[6]{432} - 16$; $11 - 2\sqrt{6} +$
 $+ 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$; $48 - 12\sqrt{10} - 12\sqrt{5} + 20\sqrt{2}$. 4. 8 ; 16 .

5. Să se demonstreze egalitățile:

- a) se ridică fiecare membru la pătrat și se compară rezultatele;
 b) idem:
 c) se ridică fiecare membru la cub și se compară rezultatele.

6. *Indicație:* Se notează expresia cu M ; prin ridicare la pătrat se află M^2 și apoi M .

a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt{4}$.

Să se descompună în factori:

1. $\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}+1)$; $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)$.
 2. $\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$; $(x+\sqrt{y}+z)(x+\sqrt{y}-z)$.
 3. $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{a}+\sqrt{b})$;
 $(\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{b})(\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{b})$.

Să se simplifice fracțiile:

1. $1 + \sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{a}$.
 2. $\sqrt[3]{ab}$; $b\sqrt{a-1}$; $\sqrt{a+b}$; $\frac{\sqrt[3]{xu}}{\sqrt[3]{a}}$; $\frac{1}{x+\sqrt{xy}+y}$.



3. $\sqrt{a} - \sqrt{b}$; $\sqrt{x-1}$; $\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}$; $a - \sqrt{a}$.
4. $\sqrt{x+3}$; $\sqrt{a-3}$; $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. 5. $x + \sqrt{y} + 2$.
- 6) $\frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{5}$; $\frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{9}}{4}$;
- 7) $\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3}$; $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$; $\frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7} + 1}{6}$;
- 8) $\frac{\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{4} + 4}{-2}$; $\frac{2(9\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} + 4)}{23}$;

Extragerea rădăcinii dintr-un radical:

1. $\sqrt[6]{x^5}$; $\sqrt[8]{a^7}$; $\sqrt[4]{x^3}$. 2. $\sqrt[8]{2^7}$; $\sqrt[27]{3^{11}}$; $\sqrt[n(n-1)]{a^{n-1}}$. 3. $\sqrt[mp]{x^{p(n+1)+1}}$;
 $\sqrt[24]{x^{13}}$. 4. a ; 1.

Raționalizarea numitorilor

1. $\sqrt{a}$; $\frac{\sqrt{m}}{m}$; $\sqrt[3]{a^2}$; $\frac{(m+n)\sqrt{m-n}}{m-n}$; $2\sqrt{2}$; $3\sqrt[4]{2}$; $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$; $(a+b)\sqrt[3]{(a-b)^2}$.
2. $\frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{a-b}$; $\frac{a(1+\sqrt{a})}{1-a}$; $2\sqrt{3} - 3$.
3. $\frac{2(7+2\sqrt{3})}{37}$; $\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$; $\frac{\sqrt{11}-3\sqrt{5}}{-34}$; $\frac{7\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{97}$.
4. $3(5\sqrt{2}-6+3\sqrt{6}-4\sqrt{3})$; $\frac{5(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{30})}{2}$; $\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$;
 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

5. **Indicație:** Se amplifică fracția cu conjugata numărătorului:

$$\frac{n+1-n^2}{\sqrt{n+1}+n}$$

Aflarea valorii numerice

1. $2 - \sqrt{3}$.
2. $\sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2$.
3. $\frac{a}{b}$.

4. **Indicație:** Se aduce expresia la forma cea mai simplă și apoi se face înlocuirea. Se obține b .

5. $\frac{\sqrt{ab}(a+b)}{2ab}$.

6. 0.

Generalizarea noțiunii de putere

II. 5. $a^{-2} + a^{-1} + 1$. 6. $3x + 1 - x^{-1}$.

III. 1. 2. 3. $\frac{2}{3} x^{-3}$; $2(xy)^{\frac{1}{3}}$. 4. $a^{-1} - x^{-1}$. 5. $x^2 - 1$.

6. $a^4 - 1$. 7. $x^{\frac{3}{2}} - 2y^{\frac{1}{4}}$.

IV. 1. 18. 2. 1.

V. Indicație: Se găsește $x^2 = \frac{a^2(m^2 + n^2)}{2mn}$; $x^2 + a^2 = \frac{a^2(m + n)^2}{2mn}$;

$x^2 - a^2 = \frac{a^2(m - n)^2}{2mn}$. Se obține $\frac{m^2}{n^2}$.

Capitolul VI

Ecuații de gradul II: 29. 41,259, 1649, $\frac{41}{4}$; 30. $m_1 = 1$, $m_2 = -\frac{13}{5}$.

Ecuații iraționale: 1) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; 2) $x = 100$; 3) $x = 25$; 4) $x = 3$;
5) $x = 1$; 6) $x = 4$; 7) $x = 3$; 8) $x = \frac{16}{25}$; 9) $x = 2$; 10) $x_1 = 0$, $x_2 = -5$;

11) $x = \frac{3a^2}{4}$ ($a > 0$); 12) $x = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4} \sqrt{2}$. Probleme de gradul doi: 1) 4,6,8;

2) 64; 3) 10 ore și 15 ore; 4) 80 după plan; 5) 3; 6) 7,5 cm; 7) 40; 8) 23;
9) 6, 8, 10; 10) 5.

Capitolul VII

6. g) 173; 7. a) Indicație: Se va scrie $x^2 + 2y^2 = x^2 - (iy\sqrt{2})^2$; b) Indicație: Se va scrie $4x^2 + 9y^2 = (2x)^2 - (3yi)^2$; 12. a) $2 \pm 5i$; $3 \pm i\sqrt{2}$;
 $6 \pm i\sqrt{2}$; b) $\frac{2 \pm i}{2}$; 13. Indicație: Se va scrie $x^3 - 5 = x^3 - (\sqrt[3]{5})^3 = 0$; a) $\sqrt[3]{5}$,

$-\frac{\sqrt[3]{5} + i\sqrt[3]{3\sqrt[3]{25}}}{2}$; b) 4, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; 2, $-1 \pm i\sqrt{3}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{3}$;

$\frac{5}{2}$, $\frac{-5 \pm 5i\sqrt{3}}{4}$; c) -1 , $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; -2 , $1 \pm i\sqrt{3}$; $\frac{-5}{2}$, $\frac{5 \pm 5i\sqrt{3}}{4}$.

Capitolul VIII

1. a) (4, -2); (0, 2). b) $\left(-2 + i\sqrt{3}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-2 - i\sqrt{3}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Sistemul este nedeterminat și admite soluții de forma $\left(\frac{5-3k}{2}, k\right)$ unde $k \in \mathbb{C}$.

3. Sistemul este incompatibil.

4. a) $(10, 14); (-10, -14)$. b) $(1, 5); (5, 1)$. c) $(7, 2); (-2, -7)$.

5. a) *Indicație.* Se adună ecuațiile. $(7, 3); (7, -4); (-8, 3); (-8, -4)$.

b) *Indicație.* Se adună ecuațiile (se poate aplica și metoda de la sistemele în care membrul stâng al fiecărei ecuații este polinom omogen).

$(3, 1); (-3, -1); \left(12, -\frac{7}{2}\right); \left(-12, \frac{7}{2}\right)$.

6. a) $\left(\frac{5}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right); \left(\frac{-5}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

b) *Indicație.* Sistemul este simetric. $(2, 3); (3, 2); (-2, -3); (-3, -2)$.

c) $(3, 5); (-3, -5); (-8, 5); (8, -5)$.

7. Dacă $a \neq -\frac{10}{9}$ sau $a \neq -4$ sistemul are soluția $(0, 0)$.

Dacă $a = -\frac{10}{9}$ sau $a = -4$ sistemul este nedeterminat.

8. a) $(3, 2); (2, 3); (1, -6); (-6, 1)$.

b) $(2, 6); (6, 2)$.

9. *Indicație.* Se rezolvă sistemul format din primele două ecuații (v. sistemul 1) și se înlocuiesc valorile lui x și y în ecuația a treia. $m = -2$.

10. *Indicație.* Sistemul este simetric $(x + y = s, xy = p)$. $m = 1; m = \frac{52}{29}$.

11. *Indicație.* Sistemul este simetric. $(1, 2); (2, 1)$.

12. $(4, 4)$.

13. a) *Indicație.* Se află z din ecuația a doua și se notează $x + y = s$ și $xy = p$, etc.

$(3, 7, 5); (7, 3, 5)$.

b) *Indicație.* Se scade ecuația a treia din prima ecuație și se obține $(y - x)(x + y + 2z) = 0$ etc.

14. *Indicație.* Se notează $x + y + z$ cu t și se obține:

$$\begin{cases} xy + xz = 2t \\ yz + yx = 3t \\ zx + zy = 4t \end{cases}$$

Adunând obținem $xy + yz + zx = \frac{9}{2}t$ și scăzând pe rând ecuațiile $xy + xz = 2t, \dots$ obținem un sistem de forma:

$$\begin{cases} xy = A \\ yz = B \\ zx = C \end{cases}$$

17. $(a-1, a+1); (a+1, a-1)$. 18. $(1, 2)$.

19. *Indicație.* Sistemul este simetric. $(4, 5); (5, 4)$.

20. $(2, 1); (-2, -1), \left(\frac{7}{\sqrt{11}}, \frac{6}{\sqrt{11}}\right); \left(-\frac{7}{\sqrt{11}}, -\frac{6}{\sqrt{11}}\right)$.

21. $\frac{\pm a}{\sqrt{a+b}}, \frac{\pm b}{\sqrt{a+b}}$. 22. a) $(\pm 1, \pm 2); (\pm 2, \pm 1)$.

b) $\left(0, \frac{\sqrt{7}}{2}\right); \left(0, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right); \left(2\sqrt{\frac{7}{10}}, \sqrt{\frac{7}{10}}\right); \left(-2\sqrt{\frac{7}{10}}, -\sqrt{\frac{7}{10}}\right)$.

c) $(\pm 3, \pm 1); (\pm \sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2})$. 23. a) $(1, 2, 3); (-1, -2, -3)$.

b) $(1, 2, 3); (-1, -2, -3); \left(2, 1, \frac{3}{2}\right); \left(-2, -1, -\frac{3}{2}\right)$.

c) $(1, 4, 5); (-1, 6, 7)$. d) $(1, 3, 4); (-1, -3, -4)$.

e) $\left(\frac{a}{\sqrt{a+b+c}}, \frac{b}{\sqrt{a+b+c}}, \frac{c}{\sqrt{a+b+c}}\right);$

$\left(\frac{-a}{\sqrt{a+b+c}}, \frac{-b}{\sqrt{a+b+c}}, \frac{-c}{\sqrt{a+b+c}}\right)$.

24. 10 și 6. 25. $\frac{6}{7}$. 26. 25.

27. Accelerația $\approx 0,054 \text{ m/s}^2$, 46min 40s.

28. 36km/oră, 24km/oră. 29. 7N, 24N.

30. 35m, 24m. 31. 10ore, 12ore. 32. 3, 4, 5.

BIBLIOGRAFIE

Pentru aprofundarea problemelor din acest manual și pentru îmbunătățirea cunoștințelor de algebră, recomandăm elevilor să consulte următoarele lucrări:

1. S t a m a t e , I., S t o i a n , I. *Culegere de probleme de algebră pentru învățământul mediu*. București, Editura didactică și pedagogică, 1965.
2. C o ș n i ț ă , C. *Teoreme și probleme alese de matematică*. București, Editura tehnică, 1958.
3. G h e r m ă n e s c u , M., A n g e l e s c u , T r , S a g e r , I. *Probleme de matematici pentru examenul de admitere în învățământul tehnic superior*. București, Editura tehnică, 1958.
4. S a c t e r , O. *Olimpiada matematică*. București, Editura tineretului, 1959.
5. R i m e r , O. *Noțiuni de teoria mulțimilor*. București, Editura didactică și pedagogică, 1962.
6. *** „Gazeta matematică” seria B.

$$\frac{1}{x} : x$$

Ciofu Varile

V. Ciofu Ciofu Varile.

CUPRINS

Cap. I.	Mulțimi Relații. Propoziții.	
	Mulțimi de numere	3
	1. Mulțimi. Relații. Propoziții	3
	2. Mulțimi de numere	9
	Exerciții	26
Cap. II.	Calculul algebric	30
	1. Expresii algebrice	30
	2. Monom	31
	3. Polinom	36
	4. Frații algebrice	62
Cap. III.	Egalități: Ecuații și sisteme de ecuații liniare	77
	1. Ecuații de gradul întâi cu o necunoscută.....	77
	2. Sisteme de ecuații	86
	Exerciții	96
Cap. IV	Inecuații de gradul întâi cu o necunoscută	100
	Exerciții	104
Cap. V.	Puteri cu exponent rațional	
	1. Expresii algebrice iraționale	106
	2. Puteri naturale	106
	3. Definiția radicalului	108
	4. Proprietăți ale radicalilor	110
	5. Aducerea radicalilor la același indice.....	112
	6. Scoaterea unui factor rațional de sub radical..	117
	7. Introducerea unui factor sub radical.....	119
	8. Eliminarea radicalului de la numitor.....	120
	9. Extragerea rădăcinii din numere negative.....	121
	10. Radicali asemenea	123
	11. Adunarea și scăderea expresiilor iraționale	125
	12. Înmulțirea expresiilor iraționale	125
	13. Împărțirea expresiilor iraționale	126
	14. Ridicarea la putere a expresiilor iraționale	127
	15. Descompunerea expresiilor iraționale în factori și simplificarea fracțiilor care conțin expresii iraționale	128
	16. Extragerea rădăcinii dintr-o expresie irațională	130
	17. Raționalizarea numitorilor unei fracții.....	131
	18. Valoarea numerică a unei expresii algebrice iraționale	135
	19. Generalizarea noțiunii de putere	142
	Exerciții	152
Cap. VI.	Ecuația de gradul doi și ecuații iraționale	154



1. Ecuația de gradul doi	154
2. Ecuații iraționale	159
✓ Exerciții	161
Cap. VII. Numere complexe	166
1. Corpul numerelor complexe	166
2. Construcția corpului numerelor complexe pe baza noțiunii de pereche ordonată de numere reale	176
3. Ecuația de gradul doi cu coeficienți reali rezolvată în corpul numerelor complexe	179
4. Ecuația bipătrată	182
✓ Exerciții	183
Cap. VIII. Sisteme de ecuații	185
1. Ecuația de gradul doi cu două sau mai multe necunoscute cu coeficienți reali, rezolvată în corpul numerelor complexe	185
2. Sisteme de ecuații cu coeficienți reali rezolvate în corpul numerelor complexe	186
3. Sisteme simetrice	192
4. Alte sisteme	194
5. Sisteme de ecuații cu mai multe necunoscute	199
6. Rezolvarea ecuației $z^2 = A$ în corpul numerelor complexe	202
Exerciții și probleme	204
Răspunsuri	208

Temă la trigonometrie p. trim. III

Se c:

$$2 \sin(b+c-a) = \sin(a+c-b) + \sin(a+b-c)$$

atunci are loc identitatea

$$2 \sin a = \sin b + \sin c$$

(modul)

Ciofu Vorbe
cuvântul
lui
cuvânt

(se poate lucra în mai multe feluri)

(achiziție la Institut. Politeh. Yelotă)
ampl. trecut 68.

{ Prima oră la trigonometrie se va face aplicarea
la identități.



Redactor responsabil :
CIONEA DOBROGEANU CONSTANTIN
Tehnoredactor : GRUIA IANCU

Dat la cules 3.X.1967. Bun de tipar 05.01.1968. Apărut 1968. Tiraj 85.000+100 ex. leg. 1/2 pînă. Hîrtie scris tip I A 63 g/m², ft. 16/10×100. Coli editoriale 12,904 coli de tipar 14 A. 17000. C.Z. pentru bibliotecile mari 512 (075.3). C.Z. pentru bibliotecile mici 51

Tiparul executat sub comanda nr. 70.731 la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii”, Piața Scînteii nr. 1
București — Republica Socialistă România

5

W w a

3

2

INSTITUTUL NAȚIONAL DE DIDACTICĂ
PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI - 1968

LEI 8,40

